Вариационное исчисление

А.М.Будылин
budylin@mph.phys.spbu.ru

21 мая 2001 г.

Часть I

Необходимые условия экстремума

1. Постановка некоторых вариационных задач

Чтобы получить представление о вариационных задачах, рассмотрим некоторые из них.

1.1. Отыскание геодезических

1.1.1. На плоскости

Начнем с элементарного вопроса: что представляет собой плоская кривая наименьшей длины, соединяющая две фиксированные точки плоскости?

Для математической формулировки фиксируем две точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ на плоскости xy, считая $x_1 < x_2$, и рассмотрим гладкую кривую

$$\begin{gathered} y = y(x)\,, \qquad x \in [x_1, x_2]\,, \\ \begin{cases} y_1 = y(x_1)\,, \\ y_2 = y(x_2)\,, \end{cases} \end{gathered} \tag{1.1}$$

соединяющей точки P_1 и P_2. Длина дуги кривой (1.1), как хорошо известно, равна

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,. \tag{1.2}$$

Задача сводится к выбору функции $y(x)$ так, чтобы интеграл (1.2) был наименьшим из возможных.

В постановке задачи мы наложили дополнительное ограничение (1.1), выражающееся в том, что y является однозначной функцией x. Это ограничение может быть

снято переходом к параметрическому заданию кривой в форме

$$
\begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [t_1, t_2]\,,
$$
$$
\begin{cases} x_1 = x(t_1)\,, \quad y_1 = y(t_1)\,, \\ x_2 = x(t_2)\,, \quad y_2 = y(t_2)\,. \end{cases} \tag{1.3}
$$

1.1.2. На произвольной поверхности

Менее тривиальный случай. Пусть фиксированы две точки некоторой (гладкой) поверхности, заданной, например, уравнением

$$
g(x, y, z) = 0, . \tag{1.4}
$$

Что представляет собой кривая наименьшей длины, лежащая на этой поверхности и соединяющая фиксированные точки? Именно такие кривые и называются *геодезическими*.

Для математической формулировки этой задачи будем считать, что поверхность (1.4) может быть задана параметрически

$$
\begin{cases} x = x(u, v)\,, \\ y = y(u, v)\,, \\ z = z(u, v)\,. \end{cases} \tag{1.5}
$$

Здесь u и v параметры, играющие роль координат на поверхности. Выразим квадрат дифференциала длины дуги в терминах дифференциалов u и v:

$$
(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\,, \tag{1.6}
$$

Веб – страница
Титульный лист
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 7 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

в терминах дифференциалов u и v:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\,,\\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\,,\\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

откуда

$$(ds)^2 = P(u,v)(du)^2 + 2Q(u,v)dudv + R(u,v)(dv)^2\,, \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\ Q &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\,,\\ R &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Отметим. что если координаты (u,v) на поверхности ортогональны, то

$$Q = 0 \qquad (\textit{ортогональность})\,. \tag{1.10}$$

Действительно, координатная сетка на поверхности задается кривыми $u = \mathrm{Const}$ и $v = \mathrm{Const}$. Кривая $u = u_0$ задается параметрически

$$\begin{cases} x = x(u_0, v)\,,\\ y = y(u_0, v)\,,\\ z = z(u_0, v)\,, \end{cases}$$

где роль параметра играет только переменная v. Вектор

$$\vec{t} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right), \qquad \vec{t} = \vec{t}(v),$$

направлен по касательной к этой кривой. Аналогично, касательным вектором к кривой $v = v_0$ с параметрическим заданием

$$\begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0), \\ z = z(u, v_0), \end{cases}$$

будет вектор

$$\vec{s} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \qquad \vec{s} = \vec{s}(u).$$

В случае ортогональных координат векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, приложенные к общей точке (u_0, v_0) — точке пересечения кривых $u = u_0$ и $v = v_0$, по определению, перпендикулярны друг к другу. Но $Q = \vec{s} \cdot \vec{t} = 0$ (скалярное произведение ортогональных векторов), см. рис.1.

Фиксируем теперь на поверхности точки $P_1(u_1, v_1)$ и $P_2(u_2, v_2)$, считая $u_1 < u_2$, и рассмотрим кривую, лежащую на поверхности и соединяющую точки P_1 и P_2, задавая ее явно

$$v = v(u), \qquad u \in [u_1, u_2],$$
$$\begin{cases} v_1 = v(u_1), \\ v_2 = v(u_2), \end{cases} \tag{1.11}$$

Тогда длина дуги этой кривой дается интегралом

$$I = \int\limits_{u_1}^{u_2} \sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}\, du. \tag{1.12}$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 9 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

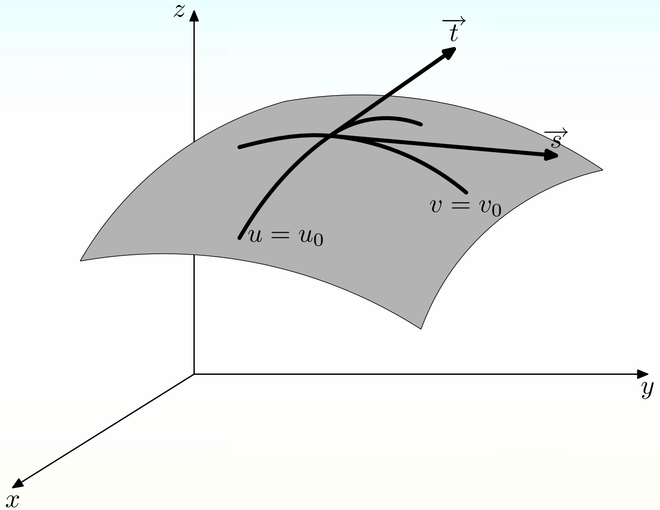


Рис. 1: Криволинейные координаты на поверхности

Задача свелась к выбору функции $v = v(u)$ так, чтобы интеграл (1.12) имел наименьшее возможное значение.

Ограничение на явное задание кривой (1.11) опять может быть снято переходом к параметрическому заданию

$$\begin{cases} u = u(t)\,, \\ v = v(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [t_1, t_2]\,,$$
$$\begin{cases} u_1 = u(t_1)\,, \quad v_1 = v(t_1)\,, \\ u_2 = u(t_2)\,, \quad v_2 = v(t_2)\,. \end{cases} \tag{1.13}$$

1.2. Задача о брахистохроне

Замечание 1.1. $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ — кратчайший, $\chi\rho o\nu o\varsigma$ — время.

Это та задача, которой вариационное исчисление обязано своим появлением на свет. Считается, что в июне 1696 года Йоган Бернулли перед своими учениками поставил следующую задачу: “Даны две точки A и B в вертикальной плоскости; найти для движущийся частицы M путь AMB, опускаясь вдоль которого под действием силы тяжести, начиная, для определенности, от точки A она может в кратчайшее время достичь точки B”.

Мы предположим, что точки A и B лежат в плоскости xy с осью y, направленной вниз, см. рис. 2. Положим $A = A(x_1, y_1)$ и $B = B(x_2, y_2)$ и пусть $y = y(x)$ — уравнение дуги, соединяющей точки A и B так, что

$$x_1 < x_2\,, \quad y_1 = y(x_1)\,, \quad y_2 = y(x_2)\,, \quad y_1 < y_2\,.$$

Скорость движения вдоль кривой пусть равна $v = \dfrac{ds}{dt}$. Тогда время спуска равно

$$I = \int\limits_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{ds}{v} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\,dx\,.$$

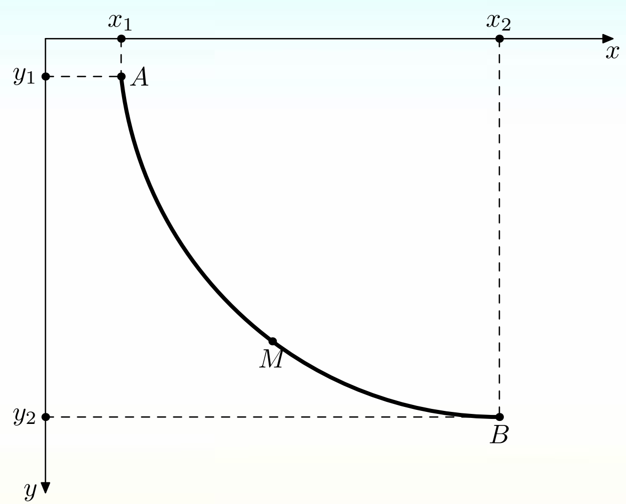


Рис. 2: К задаче о брахистохроне

Чтобы найти скорость v как функцию координаты x, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = mgy - mgy_1 \,,$$

где v_1 — начальная скорость движения частицы. Тогда

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)}\,, \qquad y_0 = y_1 - \frac{v_1^2}{2g}\,,$$

и задача свелась к выбору функции $y(x)$, для которой интеграл

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_0}}\, dx \tag{1.14}$$

достигает наименьшего значения из всех возможных.

1.3. Задача о наименьшей поверхности вращения

1.3.1. Катеноид

Даны две точки $P_1(x_1, y_1)\,, P_2(x_2, y_2)$ плоскости xy, пусть $x_1 < x_2$. Пусть далее $y = y(x)$ — уравнение кривой, соединяющей точки P_1 и P_2, т.е.

$$y_1 = y(x_1)\,, \quad y_2 = y(x_2)\,.$$

Кривая вращается вокруг оси x, заметая некоторую поверхность вращения. Спрашивается, что представляет собой поверхность вращения, имеющая наименьшую возможную площадь. Таким образом, мы приходим к проблеме выбора функции $y(x)$, для которой интеграл

$$S = 2\pi \int\limits_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx\,. \tag{1.15}$$

— площадь поверхности вращения — минимален. Такие минимальные поверхности вращения, при некоторых дополнительных ограничениях на точки P_1, P_2, называются *катеноидами*.

1.3.2. Проблема Плато

Очевидное обобщение предыдущей задачи состоит в следующем. Дана замкнутая (жорданова) кривая в пространстве. Найти поверхность, проходящую через эту кривую так, чтобы площадь, ограниченная кривой была наименьшей. Эта задача известна как *проблема Плато*.

1.4. Простейшая вариационная задача

Все описанные выше случаи можно охарактеризовать как задачи отыскания гладкой кривой $y = y(x)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$y(x_1) = y_1\,, \quad y(x_2) = y_2\,, \tag{1.16}$$

так, чтобы достигалось наименьшее значение интеграла типа

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx\,, \tag{1.17}$$

где $F(x, y, z)$ — заданная функция трех переменных. Такие задачи часто называют *простейшими задачами вариационного исчисления*.

Следующая задача вариационного исчисления выходит за рамки простейшего класса.

Веб – страница
Титульный лист
Страница 14 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

1.5. Простейшая изопериметрическая задача

Это тоже классическая задача. Ее формулировка приписывается первой карфагенской царице Дидо (задача Дидоны, из «Энеиды» Вергилия), около 850 г. до Р.Х. по ортодоксальной хронологии.

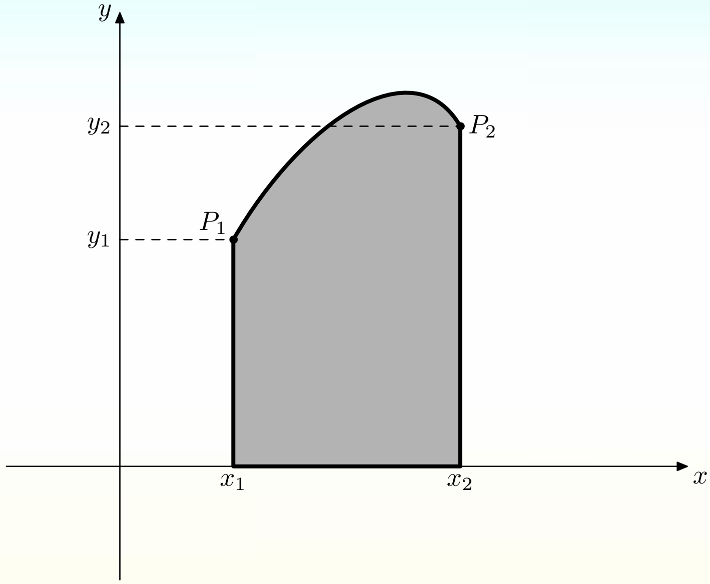


Рис. 3: К задаче Дидо

Среди всех гладких кривых длины L, соединяющих заданные точки P_1 и P_2 $(L > |P_1P_2|)$ найти ту, которая ограничивает наибольшую возможную площадь, заключенную между отрезками двух перпендикуляров, идущих от точек P_1, P_2 к

заданной оси. Положим $P_1 = P_1(x_1, y_1)\,, P_2 = P_2(x_2, y_2)$ и пусть $y = y(x)$ — искомая кривая, $y > 0$, см. рис. 3.

Требуется найти функцию $y(x)$ такую, чтобы

$$y(x_1) = y_1\,, \quad y(x_2) = y_2\,, \quad \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = L\,, \tag{1.18}$$

а интеграл

$$S = \int\limits_{x_1}^{x_2} y\, dx \tag{1.19}$$

достигал наибольшего возможного значения.

И, наконец, последний пример.

1.6. Задача навигации

В этой задаче рассматривается река ширины b с прямыми параллельными берегами. Считая один берег реки совпадающим с осью y введем скорость течения реки $v = v(x)$. Лодка с постоянной скоростью c (c — величина скорости), $c > \max\limits_{x\in[0,b]} v(x)$, за кратчайшее время должна пересечь реку, отчалив из точки $O(0,0)$, см. рис. 4.

Обозначим через α угол, который зависит от курса лодки. Тогда реальная скорость движения лодки определяется равенствами

$$\frac{dx}{dt} = c\cos\alpha\,, \quad \frac{dy}{dt} = v + c\sin\alpha\,.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v + c\sin\alpha}{c\cos\alpha}\,,$$

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 16 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

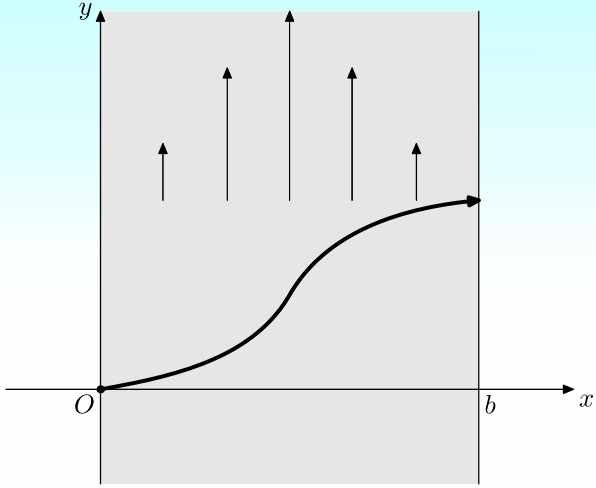


Рис. 4: К задаче о навигации

что позволяет выразить α через $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\left(y' - \frac{v}{c\cos\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{2vy'}{c}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} - (1 + y'^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{vy'}{c} \pm \sqrt{\frac{v^2y'^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(1 + y'^2)}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c\cos\alpha} = \frac{\sqrt{c^2(1 + y'^2) - v^2} - vy'}{c^2 - v^2}.$$

Для времени пересечения реки находим

$$t = \int\limits_0^b \frac{dt}{dx}\,dx = \int\limits_0^b \frac{dx}{c\cos\alpha} = \int\limits_0^b \frac{\sqrt{c^2(1+y'^2)-v^2} - vy'}{c^2-v^2}\,dx\,. \tag{1.20}$$

Последний интеграл должен быть минимизирован за счет выбора функции $y(x)$ при условии

$$y(0) = 0\,. \tag{1.21}$$

Как видим, в отличие от предыдущих задач, правый конец искомой кривой заранее не определен. В действительности, выбор начальной точки движения лодки никак не сказывается на форме оптимального курса и условие 1.21 оказывается несущественным. Мы приходим, таким образом, к задаче *со свободными концами*.

2. Введение в вариационный метод

2.1. Происхождение названия «вариационное исчисление»

Название предмета возникло в результате обозначений Лагранжа, введенных около 1760 года. Вернемся к простейшей вариационной задаче (1.16)-(1.17). Обозначим через γ искомую кривую $y = y(x)$ и через $I\gamma$ — интеграл

$$I\{\gamma\} = \int\limits_{\gamma} F(x, y, y')\,dx$$

вдоль кривой γ. Лагранж изменял функцию $y(x)$, определяющую кривую γ, прибавляя к ней величину $\delta y(x)$, которая также является функцией x. Он называл эту величину *вариацией* функции $y(x)$. Если вариация $\delta y(x)$ обращается в ноль в точках x_1 и x_2, то кривая, определенная функцией $y(x) + \delta y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, будет проходить через концы кривой γ. Эту кривую удобно обозначить через $\gamma + \delta\gamma$. Задача состоит тогда в разыскании в данном классе кривых, соединяющих концы кривой γ, такой кривой, для которой выполняется неравенство

$$\Delta I = I\{\gamma + \delta\gamma\} - I\{\gamma\} \geqslant 0$$

при любом выборе вариации $\delta y(x)$, определяющей дугу $\gamma+\delta\gamma$ из того же класса. Для решения этой задачи в вариационном исчислении пользуются часто представлением разности

$$\Delta I = \int\limits_{x_1}^{x_2} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]\,dx$$

в виде

$$\Delta I = \delta I + \frac{1}{2!}\,\delta^2 I + \frac{1}{3!}\,\delta^3 I + \ldots\,,$$

где $\delta I\,, \delta^2 I\,, \ldots$ представляют собой интегралы однородных полиномов первого, второго и высших порядков от δy и ее производной $\delta y' = (\delta y)'$ по x, находимых при разложении подынтегрального выражения в ΔI в ряд Тейлора по степеням δy и $\delta y'$. Выражения $\delta I\,, \delta^2 I\,, \ldots$ называются первой, второй и т.д. *вариациями* интеграла I. Таковы обозначения Лагранжа, благодаря которым теория экстремума функций, подобных $I(\gamma)$, стала называться *вариационным исчислением* . Отметим, что функция F называется *функцией Лагранжа*.

Существует далеко идущая аналогия между вариациями δy и дифференциалом независимой переменной dx в дифференциальном исчислении, а также между вариациями $\delta I\,, \delta^2 I\,, \ldots$ и дифференциалами $df\,, d^2 f\,, \ldots$ функции $f(x)$.

2.2. Современная терминология

Для введения современной терминологии сделаем небольшой экскурс в теорию функций нескольких вещественных переменных.

Напомним, что если $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ — функция нескольких вещественных переменных или, что то же самое, — функция векторной переменной $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, у нас есть две возможности ввести понятие производной f'.

Первая является прямым обобщением понятия дифференциала функции одной переменной и существенно связана с существованием (евклидовой) нормы в $\mathbb{R}^n$ — модуля вектора $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Функция f называлась дифференцируемой в точке $\boldsymbol{x_0}$, если существует линейная функция $L_{\boldsymbol{x_0}}$,

$$L_{\boldsymbol{x_0}} : \quad \boldsymbol{h} \mapsto L_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{h}) = l_1 h_1 + l_2 h_2 + \ldots + l_n h_n$$

где $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots h_n)$, такая, что

$$f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0}) = L_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{h}) + o(|\boldsymbol{h}|)\,, \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{h}| \to 0\,.$$

Числа $l_1\,, l_2\,, \ldots l_n$, определяющие функцию $L_{\boldsymbol{x_0}}$, конечно, зависят от $\boldsymbol{x_0}$. Эта линейная функция и называется производной функции f в точке $\boldsymbol{x_0}$:

$$f'(\boldsymbol{x_0}) = L_{\boldsymbol{x_0}}\,,$$

при этом коэффициенты l_j совпадают с частными производными:

$$l_j = l_j(\boldsymbol{x_0}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\,.$$

Функция, дифференцируемая в этом смысле, автоматически оказывалась непрерывной.

Вторая возможность ввести понятие производной никак не была связана с нормированностью пространства $\mathbb{R}^n$ и использовала только линейность этого пространства. Это понятие производной по вектору. Функция f называлась дифференцируемой в точке $\boldsymbol{x_0}$ по вектору $\boldsymbol{h}$, если функция

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x_0} + t\boldsymbol{h})$$

одной вещественной переменной t дифференцируема в нуле (т.е. при $t = 0$), при этом значение производной $\varphi'(0)$ называется производной функции f в точке $\boldsymbol{x_0}$ по вектору $\boldsymbol{h}$ и часто обозначается $D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x_0})$:

$$D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x_0}) = \varphi'(0)\,.$$

Второе определение производной значительно менее ограничительное чем первое. Из дифференцируемости во втором смысле не следует даже непрерывности функции: функция может быть дифференцируемой по любому вектору в точке $\boldsymbol{x_0}$ и тем не менее быть разрывной в $\boldsymbol{x_0}$; такова, например, функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}\,, & \text{при} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0\,, & \text{при} \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

по отношению к точке $\boldsymbol{x_0} = (0,0)$. Вместе с тем это понятие весьма полезно при исследовании функции f на экстремум. Так, если функция имеет в точке $\boldsymbol{x_0}$ экстремум, то и функция φ при любом выборе $\boldsymbol{h}$ имеет экстремум в нуле, а следовательно

(по теореме Ферма) $\varphi'(0) = 0$, если только φ дифференцируема в нуле. Иначе говоря, в точке экстремума $\boldsymbol{x_0}$

$$\forall \boldsymbol{h}: \qquad D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x_0}) = 0\,,$$

если только производная по вектору существует.

Если функция f дифференцируема в первом смысле (так называемая дифференцируемость по Фреше), она дифференцируемы и во втором (дифференцируемость по Гато) и ее производная f' (производная по Фреше) связана с производной по вектору (производной по Гато) равенством

$$f'(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{h} = D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x_0})\,.$$

Рассмотрим теперь произвольное абстрактное множество X и вещественнозначную функцию f, заданную на этом множестве:

$$f: \qquad \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{x} \in X\,, \quad f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}\,.$$

Такие функции называют (вещественными) *функционалами*. Если X — векторное пространство, мы как и в случае вещественной функции нескольких вещественных переменных можем вести понятие производной по вектору:

$$D_{\boldsymbol{h}} f(x_0) \overset{\text{Опр.}}{=} \varphi'(0)\,, \qquad \varphi(t) = f(\boldsymbol{x_0} + t\boldsymbol{h})\,, \quad \boldsymbol{x_0}\,, \boldsymbol{h} \in X\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Эта производная как и в случае функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется производной по Гато.

В вариационном исчислении роль пространства X играет некоторое множество дифференцируемых функций y (т.е. роль векторной переменной $\boldsymbol{x}$ играет функция $y(x)$) и в качестве функционала f выступает *интегральный функционал* I:

$$I: \quad y \mapsto I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx\,.$$

Производная по Гато интегрального функционала в вариационном исчислении называется *вариацией* функционала и обозначается $\delta I[\eta]$:

$$\delta I[\eta] = \frac{d}{dt} I(y + t\eta)\Big|_{t=0},$$

где дифференцируемая функция $\eta = \eta(x)$ играет роль вектора $\boldsymbol{h}$, вдоль которого берется производная.

Аналогично определяется вторая производная по Гато или *вторая вариация* интегрального функционала:

$$\delta^2 I[\eta] = \frac{d^2}{dt^2} I(y + t\eta)\Big|_{t=0}.$$

Следует отметить, что не всегда пространство функций y в вариационном исчислении можно рассматривать как линейное. В действительности, приходится часто ограничивать пространство функций y и их вариаций η требованием принадлежности функций $y + t\eta$ (хотя бы при достаточно малых по модулю значениях t) области определения функционала I. С этим связано понятие *допустимых* вариаций η.

Наконец отметим некоторое отличие современного понятия вариации функционала от понятия, введенного Лагранжем: вариация в смысле Лагранжа отличается множителем t:

$$\Delta I = t\delta I[\eta] + \frac{t^2}{2!}\,\delta^2 I[\eta] + \frac{t^3}{3!}\,\delta^3 I[\eta] + \dots .$$

При этом вариацией функции y вместо $\delta y = t\eta$ удобно называть только функцию η:

$$\delta y = \eta\,.$$

Остановимся вначале на элементарных аспектах теории вариационного исчисления. При этом мы постоянно будем использовать ту или иную форму следующей основной леммы.

2.3. Основная лемма

2.3.1. Основной вариант

Лемма 2.1. *[Основная] Пусть $G(x)$ — фиксированная непрерывная функция, определенная на интервале $[x_1, x_2]$. Если*

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \eta(x) G(x)\, dx = 0 \tag{2.1}$$

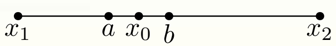
при произвольном выборе непрерывно дифференцируемой функции $\eta(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0\,, \tag{2.2}$$

то функция $G(x)$ тождественно равна нулю на интервале $[x_1, x_2]$:

$$\forall x \in [x_1, x_2]: \qquad G(x) = 0\,. \tag{2.3}$$

Доказательство. Воспользуемся стандартным рассуждением от противного. Предполагая, что условие (2.3) нарушается, приведем пример функции $\eta(x)$, удовлетворяющей граничным условиям (2.2) и такой, что условие (2.1) нарушается.



Итак, пусть $x_0 \in (x_1, x_2)$ и $G(x_0) \neq 0$. Можно считать, для определенности, что $G(x_0) > 0$. Так как G — непрерывная функция, существует целая окрестность точки x_0, скажем (a, b), в которой $G(x) > 0$:

$$x \in (a, b) \subset (x_1, x_2) \quad \Rightarrow \quad G(x) > 0\,.$$

Положим

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-a)^2 (x-b)^2\,, & x \in (a, b), \\ 0\,, & x \notin (a, b)\,. \end{cases}$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 24 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Функция $\eta(x)$ имеет непрерывную производную и на концах интервала $[x_1, x_2]$ обращается в ноль, но

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \eta G \, dx = \int\limits_{a}^{b} (x-a)^2 (x-b)^2 G(x) \, dx > 0 \,,$$

что противоречит (2.1). Остается заметить, что если $G(x) = 0$ внутри интервала $[x_1, x_2]$, то в силу непрерывности она обращается в ноль и на его концах. $\square$

2.3.2. Обобщение по гладкости

Для некоторых приложений основная лемма требуется в несколько модифицированной форме. Например, требуется, чтобы интеграл (2.1) исчезал для каждой дважды непрерывно дифференцируемой функции, удовлетворяющей граничным условиям (2.2). Утверждение (2.3) остается в силе, но функцию $\eta(x)$ надо выбрать в следующем виде:

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-a)^3 (x-b)^3 \,, & x \in (a,b), \\ 0 \,, & x \notin (a,b) \,. \end{cases}$$

Аналогично, основная лемма остается в силе, если требовать от $\eta(x)$ производных любого заданного порядка.

2.3.3. Обобщение на кратные интегралы

Пусть $\mathcal{D}$ — замкнутая и ограниченная область с гладкой границей $\partial\mathcal{D}$ на плоскости xy и $G(x,y)$ — непрерывная функция, заданная в этой области. Исчезновение двойного интеграла

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \eta(x,y) G(x,y) \, dxdy = 0 \qquad (2.4)$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 25 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

для каждой непрерывно дифференцируемой функции η, исчезающей на границе области

$$\eta(x,y)\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0 \tag{2.5}$$

с необходимостью влечет за собой также исчезновение G всюду на области

$$\forall (x,y)\in\mathcal{D}: \qquad G(x,y) = 0\,. \tag{2.6}$$

Доказательство этого варианта основной леммы, в сущности, не отличается от доказательства основного варианта.

Далее, эта двумерная форма основной леммы может быть модифицирована на случай существования непрерывных частных производных функции η произвольного порядка.

Очевидно расширение основной леммы на многократные интегралы.

2.3.4. Лемма Дюбуа–Реймона

Приведем еще один вариант основной леммы, который нацелен на более тонкий вариационный анализ.

Лемма 2.2 (Дюбуа–Реймон). *Пусть $G(x)$ — непрерывная функция на $[x_1, x_2]$. Если*

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \eta'(x) G(x)\, dx = 0 \tag{2.7}$$

для каждой непрерывно дифференцируемой функции η, удовлетворяющей граничным условиям (2.2)

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0\,, \tag{2.8}$$

то функция G постоянна:

$$G(x) = \mathrm{Const}\,. \tag{2.9}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию η вида

$$\eta(x) = \int\limits_{x_1}^{x} G(t)\,dt - C(x - x_1)\,,$$

где константа C выбрана так, чтобы $\eta(x_2) = 0$, т.е.

$$C = \frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_{x_1}^{x_2} G(t)\,dt\,.$$

Очевидно, η удовлетворяет условиям леммы. Заметим, что в силу (2.7)-(2.8)

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} [G(x) - C]\eta'(x)\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} G(x)\eta'(x)\,dx - C\eta\Big|_{x_1}^{x_2} = 0\,.$$

Ввиду $\eta'(x) = G(x) - C$, находим

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} [G(x) - C]^2\,dx = 0\,.$$

Этот интеграл может быть равен нулю лишь при условии $G(x) = C$ тождественно на $[x_1, x_2]$. $\square$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 27 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

3. Уравнение Эйлера–Лагранжа

3.1. Постановка вопроса

Полное решение задач, поставленных в разделе 1, требует достаточно продвинутой техники. Ограничим себя пока решением следующего вопроса.

Пусть известно, что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, которая минимизирует интеграл

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \tag{3.1}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$y(x_1) = y_1\,, \qquad y(x_2) = y_2\,. \tag{3.2}$$

Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет $y(x)$?

Тем самым мы не ставим на первое место вопрос о существовании минимума. Также, мы не принимаем в расчет возможность минимизации интеграла (3.1) функциями, менее гладкими (например, только кусочно непрерывно дифференцируемыми).

Функцию F будем считать дважды непрерывно дифференцируемой.

3.2. Вариация интегрального функционала

Итак, обозначим через $y(x)$ функцию, минимизирующую интеграл (3.1) и удовлетворяющую граничным условиям (3.2). Для сравнения с $y(x)$ введем однопараметрическое семейство функций $Y(x)$:

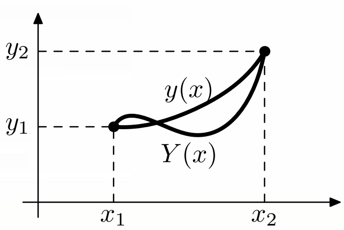
$$Y(x) = y(x) + t\eta(x)\,, \tag{3.3}$$

где $\eta(x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая нулевым граничным условиям

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0\,, \tag{3.4}$$

а t — параметр семейства. Заметим, что выбор разных функций $\eta(x)$ приводит к разным однопараметрическим семействам. Если такое семейство уже выделено, задание числа t определяет некоторую функцию $Y(x)$ этого семейства. Условия (3.4) обеспечивают выполнение граничных условий (3.2) для функции $Y(x)$:

$$Y(x_1) = y_1\,, \qquad Y(x_2) = y_2\,. \tag{3.5}$$



Важно отметить, что какое-бы семейство ни было выделено (т.е. какая бы функция $\eta(x)$ ни была фиксирована), минимизирующая функция $y(x)$ лежит в этом семействе и отвечает выбору $t = 0$.

Геометрически мы имеем дело с однопараметрическим семейством кривых $y = Y(x)$, соединяющих точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Минимизирующая кривая $y = y(x)$ является членом каждого такого семейства, отвечая выбору параметра $t = 0$. Отклонение по вертикали любой кривой семейства от минимизирующей дуги равно $t\eta(x)$.

Если функция $\eta(x)$ фиксирована, можно выбрать диапазон изменения t таким, чтобы величина вертикального отклонения $|t\eta(x)|$ была меньше произвольно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ для всех x из интервала $[x_1, x_2]$:

$$|t| \leqslant T \qquad \Rightarrow \qquad |t\eta(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (\forall x \in [x_1, x_2])\,.$$

Действительно, исходя из неравенства

$$|t\eta(x)| \leqslant T\|\eta\| < \varepsilon\,,$$

где

$$\|\eta\| = \max_{x\in[x_1,x_2]} |\eta(x)|$$

находим, что достаточно взять T, удовлетворяющее неравенству

$$T < \frac{\varepsilon}{\|\eta\|}\,.$$

Напомним, что $\|\eta\|$ называется *равномерной нормой* функции η на интервале $[x_1, x_2]$. Множество функций Y, удовлетворяющих неравенству

$$\|Y - y\| < \varepsilon\,,$$

называется равномерной ε-окрестностью функции y. Представляя функции Y как графики кривых, можно представлять ε-окрестность функции y как часть плоскости, покрываемую (выстилаемую) кривыми Y, для которых

$$x \in [x_1, x_2] \quad\Rightarrow\quad |Y(x) - y(x)| < \varepsilon\,,$$

см. рис. (5).

Замещая y и y' в интеграле (3.1) на Y и Y' соответственно, получаем интеграл

$$I(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y')\,dx\,, \tag{3.6}$$

который при заданной функции $\eta(x)$ зависит только от t. Разумеется здесь

$$Y' = Y'(x) = y'(x) + t\eta'(x)\,.$$

Наоборот, выбор $t = 0$ эквивалентен замещению Y и Y' в (3.6) на y и y', что, как мы знаем, приводит к минимуму интеграла I, в данном случае — к минимуму интеграла $I(t)$.

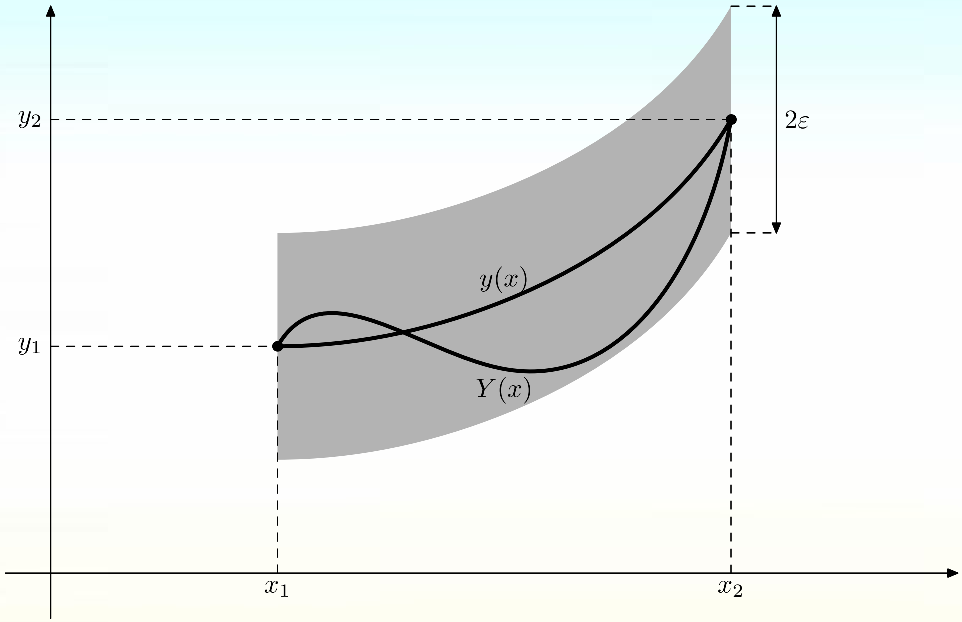


Рис. 5: Окрестность кривой $y(x)$

Итак, задача свелась к обычной задаче на минимум функции $I(t)$ одной вещественной переменной, причем в данном случае мы заранее знаем, что минимум достигается при $t = 0$, откуда по теореме Ферма

$$I'(0) = 0\,. \tag{3.7}$$

Далее нам придется воспользоваться правилами дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, а также правилами дифференцирования сложной функции нескольких переменных. Напомним их.

3.3. Экскурс в дифференциальное исчисление

3.3.1. Дифференцирование интеграла по параметру.

Если

$$I = I(t) = \int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x,t)\,dx\,,$$

где $f\,, x_1\,, x_2$ — гладкие (непрерывно дифференцируемые) функции, то

$$\frac{dI}{dt} = f(x_2,t)\frac{dx_2}{dt} - f(x_1,t)\frac{dx_1}{dt} + \int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx\,. \tag{3.8}$$

В частности, когда пределы интегрирования не зависят от параметра,

$$\frac{dI}{dt} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx\,. \tag{3.9}$$

3.3.2. Цепное правило.

Если функция $u = f(x,t)$ задана как сложная

$$\begin{cases} u = F(x,y,z)\,, \\ y = Y(x,t)\,, \\ z = Y'(x,t)\,, \end{cases}$$

где все функции считаются гладкими, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial Y'}{\partial t}\,. \tag{3.10}$$

3.4. Уравнение Эйлера–Лагранжа

3.4.1. Вывод уравнения

Вернемся к необходимому условию (3.7) минимума функции $I(t)$. Используя правила (3.9)-(3.10) и равенства

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \eta\,, \qquad \frac{\partial Y'}{\partial t} = \eta'\,,$$

находим

$$\frac{dI}{dt} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \frac{\partial Y'}{\partial t} \right) dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \eta' \right) dx\,.$$

Тогда уравнение (3.7) запишется в виде

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' \right) dx = 0\,. \tag{3.11}$$

причем оно выполняется для произвольной непрерывно дифференцируемой функции $\eta(x)$, удовлетворяющей нулевым граничным условиям (3.4).

Преобразуем второе слагаемое, интегрируя по частям

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' \, dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta \, dx \,.$$

Замечая, что внеинтегральные члены обращаются в ноль в силу (3.4), приведем равенство (3.11) к виду

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta \, dx = 0 \,. \tag{3.12}$$

Осталось воспользоваться основной леммой 2.1 и получить уравнение

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \,.} \tag{3.13}$$

Это и есть уравнение Эйлера–Лагранжа.

В общем случае, это дифференциальное уравнение относительно y второго порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \,. \tag{3.14}$$

Его решение, удовлетворяющее граничным условиям (3.2), и будет (если только оно находится однозначно) минимизирующей функцией $y(x)$.

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 34 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

3.4.2. Замечания.

Следует подчеркнуть, что условие $I'(0) = 0$ не является достаточным условием минимума функции $I(t)$ при $t = 0$. Это условие может соответствовать и точке максимума и не экстремальной стационарной точке. В принципе, все три эти ситуации могут быть интересны, если нет априорной информации о характере искомой функции $y(x)$. Исторически сложилось под экстремальными значениями интеграла (3.1) понимать все три ситуации, отвечающие условию (3.7).

Определение 3.1. Экстремальными функциями или *экстремалями* интеграла (3.1) называются решения уравнения Эйлера–Лагранжа (3.13).

Как уже отмечалось в разделе 2.2, производная $I'(0)$ называется первой вариацией функционала I и обозначается $\delta I[\eta]$:

$$\delta I[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big]\eta\, dx\,.$$

Полагая $\eta = \delta y$ пишут

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big]\delta y\, dx\,.$$

Заметим, что функционал δI линейно зависит от δy. По аналогии с производной по Фреше f',

$$f'(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{h} = \sum_{j=1}^{n} l_j h_j\,, \quad df = \langle \boldsymbol{l} | \boldsymbol{dx}\rangle\,, \quad \frac{df}{\boldsymbol{dx}} = f'(\boldsymbol{x_0}) \equiv \boldsymbol{l}\,,$$

когда производная функции нескольких переменных f' отождествляется с вектором (градиентом) $\boldsymbol{l} = (l_1, \dots l_n)$, определяющим f' как линейную функцию вектора $\boldsymbol{h}$,

так и в вариационном исчислении функцию

$$\mathcal{L} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right),$$

играющую роль вектора $\boldsymbol{l}$:

$$\delta I = \langle \mathcal{L} | \delta y \rangle \,,$$

называют вариационной производной функционала I и пишут

$$\frac{\delta I}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right).$$

Здесь $\langle \cdot | \cdot \rangle$ — обозначение для стандартного скалярного произведения как в $\mathbb{R}^n$, так и в пространстве непрерывных вещественных функций на интервале $[x_1, x_2]$.

Мы можем теперь сказать, что экстремали интеграла I появляются как решения уравнения

$$\frac{\delta I}{\delta y} = 0 \,.$$

3.5. Анализ уравнения Эйлера-Лагранжа

Отметим некоторые случаи, когда уравнение Эйлера–Лагранжа допускает понижение порядка.

3.5.1. F не зависит явно от y

Итак, пусть $F = F(x, y')$. Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \,,$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 36 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

откуда находим первый интеграл уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 = \mathrm{Const}\,.$$

Это есть дифференциальное уравнение первого порядка для определения y, но не содержащее явно y. Если это уравнение разрешить относительно производной y', оно примет простейший для дифференциального уравнения вид

$$y' = \varphi(x, C_1)\,,$$

откуда

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,dx\,.$$

В случае геодезической на плоскости, где

$$F = \sqrt{1 + y'^2}\,,$$

находим

$$\frac{y'}{1 + y'^2} = C_1\,,$$

откуда

$$y' = a$$

и

$$y = ax + b\,.$$

Постоянные a и b элементарно находятся из граничных условий. Разумеется, это тот случай, когда нетрудно показать, что прямые линии действительно минимизируют интеграл (1.2).

Веб – страница
Титульный лист
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 37 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

3.5.2. F не зависит явно от x

В этом случае $F = F(y, y')$ и полезно иметь в виду следующее тождество

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\Big(y'\,\frac{\partial F}{\partial y'} - F\Big) \\
&\qquad = \overbrace{y''\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}} + y'\cdot\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y' - \overbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y''} \\
&\qquad = -y'\Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big] - \frac{\partial F}{\partial y}\,. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Тогда, в силу $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ и уравнения Эйлера–Лагранжа, находим

$$\frac{d}{dx}\Big(y'\,\frac{\partial F}{\partial y'} - F\Big) = 0\,,$$

откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера–Лагранжа в этом случае

$$y'\,\frac{\partial F}{\partial y'} - F = C_1\,. \qquad (3.16)$$

Это уравнение первого порядка, зависящее только от y и y' и не зависящее явно от x. Если его удается явно разрешить относительно производной

$$y' = \psi(y, C_1)\,,$$

мы получаем экстремали в виде

$$x = \int \frac{dy}{\psi(y, C_1)}\,.$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 38 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

3.5.3. Случай полной производной $F = \dfrac{d}{dx}\, G(x, y)$

В этом случае интеграл I не зависит от выбора функции y:

$$I = G(x_2, y_2) - G(x_1, y_1)\,.$$

Что это означает для уравнения Эйлера–Лагранжа? Будем считать, что G — дважды непрерывно дифференцируема. В силу

$$F = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\cdot y' \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}\,,$$

получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\cdot y' - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial G}{\partial y} \\ &= \overbrace{\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}} + \underbrace{\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\cdot y'} - \overbrace{\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}} - \underbrace{\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\cdot y'} = 0\,,\end{aligned}$$

т.е. уравнение Эйлера–Лагранжа выполняется тождественно.

Естествен вопрос: каков общий случай тождественного выполнения уравнения Эйлера–Лагранжа? Воспользуемся раскрытой записью, см. (3.14)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot y'' + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y}}_{\text{зависят только от } x, y, y'} = 0\,.$$

Очевидно, что необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0\,,$$

т.е. F может быть лишь линейной функцией от y':

$$F = P(x,y) + Q(x,y)\cdot y'\,.$$

В этом случае

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y' - \frac{dQ}{dx}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} + \overbrace{\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y'} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \overbrace{\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y'} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0\,,$$

но это и есть условие того, что F — полная производная, при этом

$$P = \frac{\partial G}{\partial x}\,, \qquad Q = \frac{\partial G}{\partial y}\,.$$

Итак, мы получили необходимое и достаточное условие тождественного выполнения уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$F = \frac{d}{dx}\,G(x,y)\,.$$

Из этого наблюдения получается полезное следствие.

Теорема 3.2. *Пусть*

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \quad \text{и} \quad J = \int\limits_{x_1}^{x_2} H(x,y,y')\,dx\,,$$

где F и H — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Уравнения Эйлера–Лагранжа для интегралов I и J эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$H - F = \frac{d}{dx} G(x, y)\,.$$

Доказательство. Уравнение Эйлера–Лагранжа для интеграла J отличается от уравнения Эйлера–Лагранжа для интеграла I на уравнение Эйлера–Лагранжа для $J - I$, функцией Лагранжа для которого будет разность $H - F$ (следствие линейности интегрального функционала I относительно функции Лагранжа F). Но последнее уравнение выполняется тождественно тогда и только тогда, когда разность $H - F$ является полной производной. □

Веб – страница
Титульный лист
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 41 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

4. Приложения

4.1. Геодезические

4.1.1. Уравнение Эйлера

Вернемся к задаче о геодезической на поверхности. В соответствии с (1.12)

$$F = \sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}\,,$$

где P, Q, R — заданные функции координат (u, v) на поверхности и предполагается, что минимизирующая дуга задается равенством $v = v(u)$. Отождествляя u с x и v с y, находим

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial v} - 2\frac{\partial Q}{\partial v}v' + \frac{\partial R}{\partial v}v'^2}{2\sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}} - \frac{d}{du}\,\frac{Q + Rv'}{\sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}} = 0\,. \tag{4.1}$$

4.1.2. Частный случай, первый вариант

В специальном случае

$$P = P(u)\,, \quad Q = Q(u)\,, \quad R = R(u)$$

уравнение (4.1) ведет к первому интегралу

$$\frac{Q + Rv'}{\sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}} = C_1\,.$$

Если $Q = 0$, что соответствует ортогональной сетке координат (u, v), находим

$$R^2 v'^2 = C_1^2(P + Rv'^2) \quad \Rightarrow \quad v'^2 = \frac{C_1^2 P}{R^2 - C_1^2 R} \quad \Rightarrow$$

$$v = C_1 \int \frac{\sqrt{P}\,du}{\sqrt{R^2 - C_1^2 R}}\,.$$

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 42 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Константа C_1 и постоянная интегрирования должны определяться из граничных условий.

4.1.3. Частный случай, второй вариант

Пусть теперь

$$Q = 0\,, \quad P = P(v)\,, \quad R = R(v)\,.$$

Тогда функция Лагранжа не зависит от независимой переменной u и в силу (3.16)

$$v' \cdot \frac{Rv'}{\sqrt{P + Rv'^2}} - \sqrt{P + Rv'^2} = C_1\,,$$

откуда находим

$$C_1^2(P + Rv'^2) = P^2 \quad \Rightarrow \quad v'^2 = \frac{P^2 - C_1^2 P}{C_1^2 R} \quad \Rightarrow$$

$$u = C_1 \int \frac{\sqrt{R}\,dv}{\sqrt{P^2 - C_1^2 P}}\,.$$

Результат, конечно, ожидаемый, поскольку по сравнению с предыдущим пунктом просто поменялись ролями u и v.

4.1.4. Геодезические на сфере.

Рассмотрим сферу радиуса r

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\,.$$

В сферических координатах оно принимает вид, см. рис. 6.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \\ z = r\cos\theta\,. \end{cases}$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 43 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Мы отождествим u с φ и v с θ. Тогда в согласии с (1.9) находим

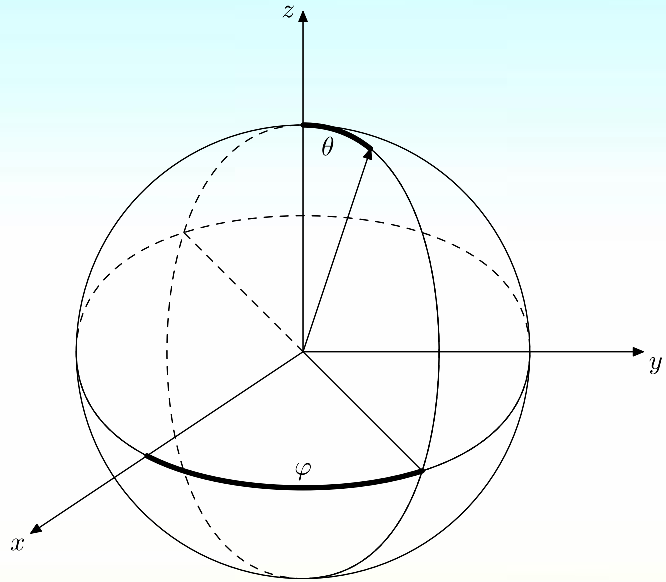


Рис. 6: Сферические координаты

$$
\begin{aligned}
P &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 \\
&= r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi = r^2 \sin^2\theta\,, \\
Q &= 0\,, \\
R &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \\
&= r^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + r^2 \sin^2\theta = r^2\,.
\end{aligned}
$$

Задача свелась к случаю (c) данного пункта.

$$
\begin{aligned}
\varphi = C_1 \int \frac{r\,d\theta}{\sqrt{r^4 \sin^4\theta - C_1^2 r^2 \sin^2\theta}} &= -C_1 \int \frac{d \operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{r^2 - \frac{C_1^2}{\sin^2\theta}}} \\
&= -\int \frac{d(C_1 \operatorname{ctg}\theta)}{\sqrt{r^2 - C_1^2 - C_1^2 \operatorname{ctg}^2\theta}} = -\arcsin \frac{C_1 \operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{r^2 - C_1^2}} + C_2\,,
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\begin{gathered}
\sin(C_2 - \varphi) = \frac{C_1 \operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{r^2 - C_1^2}} \quad \Rightarrow \\
\sin C_2 \cos\varphi - \cos C_2 \sin\varphi - \frac{C_1 \operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{r^2 - C_1^2}} = 0 \quad \Big| \times r \sin\theta \quad \Rightarrow \\
\boxed{Ax + By + Cz = 0}\,,
\end{gathered}
$$

где мы положили

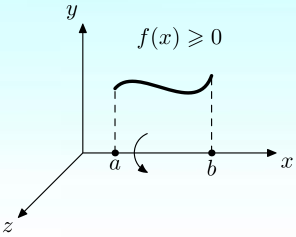
$$
A = \sin C_2\,, \quad B = -\cos C_2\,, \quad C = -\frac{C_1}{\sqrt{r^2 - C_1^2}}\,.
$$

Таким образом, геодезические лежат в плоскости, проходящей через начало координат (центр сферы) и тем самым являются дугами больших кругов.

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 45 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

4.1.5. Геодезические на поверхности вращения.

Найдем геодезические на поверхности вращения, заданной уравнением



$$y^2 + z^2 = f^2(x)\,.$$

Удобные координаты на такой поверхности имеют вид

$$\begin{cases} x = u\,, \\ y = f(u)\cos v\,, \\ z = f(u)\sin v\,, \end{cases}$$

где v — полярный угол в плоскости yz. Вычисляя P, Q и R, находим

$$P = 1 + f'^2(u)\,, \quad Q = 0\,, \quad R = f^2(u)\,.$$

Тогда при $f(x) \neq 0$ можно воспользоваться результатом пункта (b):

$$v = C_1 \int \frac{\sqrt{1 + f'^2(u)}\,du}{f(u)\sqrt{f^2(u) - C_1^2}}\,.$$

4.2. Брахистохрона

Анализ уравнения Эйлера–Лагранжа, проведенный в параграфе 3.5.2, позволяет решить и эту задачу, т.к. функция Лагранжа

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_0}}\,,$$

см. (1.14), от x не зависит. Согласно (3.16) найдем первый интеграл:

$$y' \cdot \frac{y'}{\sqrt{(y-y_0)(1+y'^2)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_0}} = C_1 .$$

Разрешая это уравнение относительно y', находим

$$\begin{gathered}
y'^2 - (1+y'^2) = C_1\sqrt{(y-y_0)(1+y'^2)} \quad \Rightarrow \\
C_1^2(y-y_0)(1+y'^2) = 1 \quad \Rightarrow \\
y'^2 = \frac{1-C_1^2(y-y_0)}{C_1^2(y-y_0)} \quad \Rightarrow \\
\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-(y-y_0)}{y-y_0}} ,
\end{gathered}$$

где мы положили $2a = 1/C_1^2$. Таким образом

$$x = \int \frac{\sqrt{y-y_0}\,dy}{\sqrt{2a-(y-y_0)}} .$$

Для вычисления интеграла удобно воспользоваться заменой

$$y - y_0 = 2a\sin^2\frac{\theta}{2} .$$

Тогда

$$\begin{aligned}
x = \int \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \cdot 2a \cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{2} \\
= 2a\int \sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = a\int (1 - cos\theta)\,d\theta = a(\theta - \sin\theta) + x_0 ,
\end{aligned}$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 47 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

где x_0 — постоянная интегрирования. Мы пришли к решению в параметрической форме

$$\begin{cases} x - x_0 = a(\theta - \sin\theta) \\ y - y_0 = a(1 - \cos\theta)\,. \end{cases}$$

Это и есть кривая наибыстрейшего спуска. Уравнения хорошо известны под названием циклоиды. Можно показать, что выбор постоянных a и x_0 позволяет провести циклоиду через произвольные две заданные точки. Напомним, что величина y_0 не является произвольной постоянной.

4.3. Минимальная поверхность вращения

4.3.1. Катеноид

Функция Лагранжа в этом случае, см. (1.15), имеет вид

$$F = y\sqrt{1 + y'^2}$$

и также как выше не зависит от x. Первый интеграл дается равенством

$$y' \cdot \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} - y\sqrt{1 + y'^2} = C_1\,,$$

и тогда

$$\begin{aligned} yy'^2 - y(1 + y'^2) = C_1\sqrt{1 + y'^2} \quad &\Rightarrow \\ C_1^2(1 + y'^2) = y^2 \quad &\Rightarrow \\ y'^2 = \frac{y^2 - C_1^2}{C_1^2} \quad &\Rightarrow \\ x = \int \frac{C_1\,dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}}\,. & \end{aligned}$$

Удобно далее положить $y = C_1 \operatorname{ch} t$. Напомним, что

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e-t}{2}, \qquad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Тогда

$$x = \int \frac{C_1^2 \operatorname{sh} t \, dt}{C_1 \operatorname{sh} t} = C_1 t + C_2 .$$

Положим $C_1 = b$ и $C_2 = a$, тогда окончательно

$$y = b \operatorname{ch} \frac{x-a}{b},$$

— искомая кривая (цепная линия).

4.3.2. Огибающая

Существует, однако, одна проблема в связи с найденным решением. Оказывается, если мы фиксируем точку $P(x_1, y_1)$ и начнем проводить через нее различные цепные линии найденного вида, т.е. построим, как говорят, пучок экстремалей, то будет существовать огибающая этого пучка, т.е. кривая, которая касается каждой кривой пучка, см. рис. 7. Это означает, что если вторая точка $P_2(x_2, y_2)$ не лежит на этой огибающей (как точка типа A), то через нее либо вообще нельзя провести цепную (точка типа B), либо можно провести целых две цепных (точка типа C), лишь одна из которых будет действительно доставлять минимум площади поверхности вращения. В отношении точки типа B можно добавить, что полученный результат вовсе не означает, что в этом случае минимальной поверхности вращения не существует. Просто минимум не доставляется гладкой кривой и такая минимальная поверхность уже не будет катеноидом.

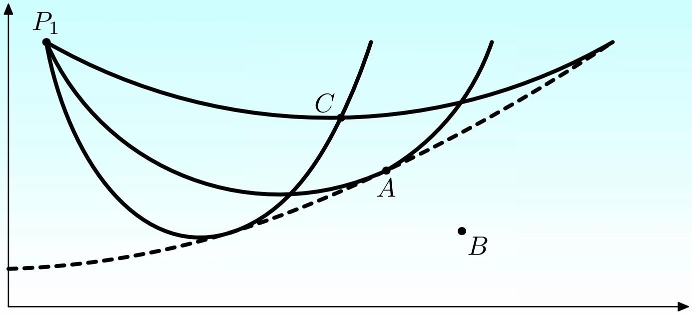


Рис. 7: Огибающая семейства цепных линий

4.4. Геометрическая оптика

Согласно принципу Ферма, путь света между двумя точками в однородной среде является отрезком прямой. Ввиду постоянства скорости света в однородной среде, этот принцип можно выразить словами: путь света между двумя точками в однородной среде сообщает наименьшее значение времени движения. В неоднородных средах этот принцип требует минимума для функционала времени

$$t = \int_{\gamma} \frac{ds}{v}$$

на пути γ движения светового луча. Здесь ds — элемент длины дуги и v — скорость света.

Рассмотрим движение светового луча в плоскости xy от точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2). Скорость света описывается функцией $v = v(y)$. Это приводит нас к поиску

экстремалей функционала

$$t = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}\, dx\,.$$

Поскольку функция Лагранжа

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}$$

не зависит явно от x, приходим к первому интегралу движения

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = C_1\,,$$

т.е.

$$\frac{y'^2}{v\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} = C_1\,,$$

откуда

$$\frac{1}{v\sqrt{1+y'^2}} = C\,, \tag{4.2}$$

здесь мы положили $C = -C_1$. Экстремали будут иметь вид

$$x = \int \frac{Cv\,dy}{\sqrt{1-C^2v^2}}\,.$$

Отметим, что формально равенство (4.2) ведет к хорошо известному закону преломления Снеллиуса

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

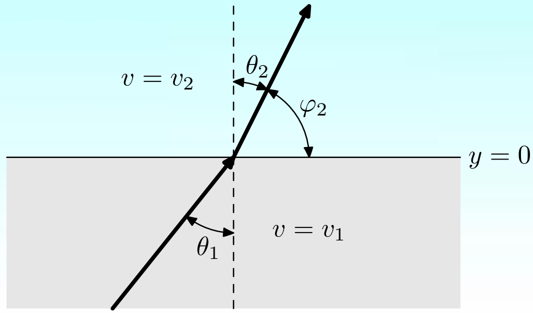


Рис. 8: Закон Снеллиуса

Действительно, если $y = 0$ — граница раздела двух однородных сред, так что

$$v(y) = \begin{cases} v_1\,, & y < 0\,, \\ v_2\,, & y > 0\,, \end{cases}$$

то в каждой среде тангенс угла наклона экстремали (т.е. $y' = \operatorname{tg}\varphi$), согласно (4.2), является постоянным, при этом

$$\sin\theta = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}\,,$$

см. рис. 8, что ведет к равенству

$$\frac{\sin\theta}{v} = C\,.$$

5. Обобщения

5.1. Случай нескольких искомых функций

Получим дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять дважды непрерывно дифференцируемые функции $y(x), \ldots z(x)$, чтобы быть экстремалями интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \ldots, z, y', \ldots, z')\, dx\,. \tag{5.1}$$

Обозначим через $y(x), \ldots, z(x)$ функции, доставляющие интегралу I наименьшее (наибольшее) значение и построим однопараметрическое семейство сравнимых функций

$$Y(x) = y(x) + t\eta(x)\,, \ldots Z(x) = z(x) + t\zeta(x)\,,$$

где $\eta(x), \ldots \zeta(x)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{cases} \eta(x_1) = 0\,, \\ \eta(x_2) = 0\,, \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} \zeta(x_1) = 0\,, \\ \zeta(x_2) = 0\,. \end{cases}$$

Замещая в интеграле I экстремальные функции $y, \ldots, , z$ сравнимыми функциями, получим функцию одной вещественной переменной t

$$I(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, \ldots, Z, Y', \ldots, Z')\, dx\,,$$

где $Y', \ldots Z'$ обозначают производную по x. При $t = 0$ интеграл I получает свое экстремальное значение и, следовательно, его вариация δI равна нулю:

$$I'(0) = 0\,.$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 53 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Ввиду

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \eta\,, \dots, \frac{\partial Z'}{\partial t} = \zeta'\,,$$

находим (согласно (3.9) и (3.10))

$$I'(t) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial F}{\partial Y}\cdot\eta + \ldots + \frac{\partial F}{\partial Z}\cdot\zeta + \frac{\partial F}{\partial Y'}\cdot\eta' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial Z'}\cdot\zeta'\Big]\,dx\,.$$

При $t = 0$

$$I'(0) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\eta + \ldots + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\zeta + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial z'}\cdot\zeta'\Big]\,dx = 0\,.$$

Выбор $\eta, \ldots \zeta$ — произволен. Положим все вариации, кроме η, равными нулю, тогда

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta'\Big]\,dx = 0\,.$$

Отсюда, как в одномерном случае, интегрируя по частям во втором слагаемом и используя граничные условия, получаем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big]\cdot\eta\,, dx = 0\,.$$

В силу основной леммы

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) = 0\,.$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 54 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Аналогично поступаем в остальных случаях. Получаем систему дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\,, \dots\,, \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0\,. \tag{5.2}$$

Отметим тождество

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} + \ldots + z'\cdot\frac{\partial F}{\partial z'} - F\right) \\ &\qquad = \underbrace{y''\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}} + y'\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \ldots + \overbrace{z''\cdot\frac{\partial F}{\partial z'}} + z'\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) \\ &\qquad - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y' - \ldots - \frac{\partial F}{\partial z}\cdot z' - \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y''} - \ldots - \overbrace{\frac{\partial F}{\partial z'}\cdot z''} \\ &\qquad\qquad = -y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] - \ldots - z'\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right] - \frac{\partial F}{\partial x}\,. \end{aligned}$$

Если F не зависит явно от x, получаем первый интеграл системы (5.2):

$$y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} + \ldots + z'\cdot\frac{\partial F}{\partial z'} - F = C_1\,. \tag{5.3}$$

5.2. Параметрическое представление

В некоторых задачах поиск экстремалей интеграла

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

в явном виде $y = y(x)$ может быть чрезмерно ограничительным. В этом случае следует перейти к параметрическому представлению

$$\begin{cases} x = x(\tau)\,, \\ y = y(\tau)\,, \end{cases} \qquad \tau \in [\tau_1, \tau_2]\,.$$

Тогда (в предположении $\dot{x} \neq 0$)

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} F\Big(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\Big)\dot{x}\,d\tau \\ &= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} G(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,d\tau\,, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}\,, \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\tau}\,, \quad G = F\Big(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\Big)\cdot \dot{x}\,.$$

Система Эйлера–Лагранжа примет вид

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\Big) = 0\,, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial G}{\partial \dot{y}}\Big) = 0\,. \tag{5.5}$$

Возникает естественный вопрос, на сколько серьезные изменения при этом произошли по сравнению с исходным уравнением Эйлера–Лагранжа? Подвергнем полученную систему небольшому анализу в этом направлении. Заметим, что

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot \dot{x}\,, \qquad \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\Big(-\frac{\dot{y}}{\dot{x}^2}\Big)\cdot \dot{x} + F = F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\,,$$

и (ввиду тождества (3.15))

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\Big)\cdot\frac{dx}{d\tau} = \dot{x}\frac{d}{dx}\Big(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) = \dot{x}\Big\{y'\Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big] + \frac{\partial F}{\partial x}\Big\}\,,$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 56 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

откуда (ввиду $\dot y = y' \cdot \dot x$)

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial G}{\partial \dot x}\Big) = \dot y\Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big].$$

Аналогично

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\cdot \dot x\,, \qquad \frac{\partial G}{\partial \dot y} = \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{1}{\dot x}\cdot \dot x = \frac{\partial F}{\partial y'}\,, \qquad \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial G}{\partial \dot y}\Big) = \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\cdot \dot x\,,$$

и тогда

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial G}{\partial \dot y}\Big) = \dot x\Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big].$$

Мы проверили важное **свойство инвариантности** уравнения Эйлера–Лагранжа: *если кривая, вне зависимости от того, задана она однозначно или параметрически, удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) = 0\,,$$

то она также удовлетворяет системе (5.5) *и обратно при любом выборе параметра при условии* $\dot x \neq 0$.

Это свойство позволяет при решении вариационной задачи использовать наиболее удобные для данной задачи координаты. Так, например, для экстремалей интеграла

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

в исходных декартовых координатах получаем уравнение

$$\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0\,,$$

анализ которого весьма не прост. Однако, если воспользоваться параметрической формой в полярных координатах

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta\,, \\ y = r(\theta)\sin\theta\,, \end{cases}$$

интеграл I приводится к виду

$$I = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} r\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta\,,$$

где функция Лагранжа не зависит явно от θ: поиск функции $y = y(x)$, доставляющей экстремальное значение интегралу I, подменен поиском функции $r(\theta)$. Мы получаем возможность сразу выписать первый интеграл, см. (3.16), уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$r'\frac{rr'}{\sqrt{r + r'^2}} - r\sqrt{r + r'^2} = C_1\,,$$

и решить задачу

$$\begin{aligned} r^3 &= -C_1\sqrt{r^2 + r'^2} \qquad \Rightarrow \\ \theta = \int \frac{C\,dr}{\sqrt{r^6 - C^2 r^2}} &= \int \frac{C\,dr}{r^3\sqrt{1 - \frac{C^2}{r^4}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{C}{r^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{C}{r^2}\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{2}\arcsin\frac{C}{r^2} + \theta_0 \qquad \Rightarrow \\ \frac{C}{r^2} &= \sin 2(\theta_0 - \theta) \qquad \Rightarrow \\ r &= \frac{r_0}{\sqrt{|\sin 2(\theta_0 - \theta)|}}\,, \end{aligned}$$

где r_0 и θ_0 — постоянные интегрирования ($r_0^2 = |C| = -C_1$). Нетрудно видеть, что найденные экстремали являются гиперболами. Действительно, поворотом системы координат xy на угол θ_0 мы добиваемся (в новых декартовых координатах) равенства θ_0 нулю. Тогда, например, при $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$xy = r^2(\theta)\frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{r_0^2}{2}\,.$$

Следует, однако, проявлять определенную осторожность в связи с требованием строгой монотонности зависимости x от параметра. Так, например, при решении предыдущей задачи нами были потеряны экстремали вида $y = kx$, что в полярных координатах соответствует лучам $\theta = \mathrm{Const}$. В этом случае (т.е. когда точки P_1 и P_2 лежат на таких лучах) введения полярного угла θ в качестве параметра невозможно.

5.3. Случай производных высших порядков

Рассмотрим интеграл, зависящий от производных искомых функций до n-го порядка включительно:

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx\,,$$

считая, что функция F непрерывно дифференцируема по всем переменным $(n+1)$ раз. Какому дифференциальному уравнению должна удовлетворять $2n$ раз непрерывно дифференцируемая функция y, сообщающая интегралу I экстремальное значение?

Замещая в интеграле I экстремальную функцию $y = y(x)$ сравнимой

$$Y(x) = y(x) + t\eta(x)\,,$$

где η — n раз непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = \eta'(x_1) = \eta'(x_2) = \ldots = \eta^{(n-1)}(x_1) = \eta^{(n-1)}(x_2) = 0\,,$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

получим функцию переменной t

$$I(t) = I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y', \ldots, Y^{(n)})\, dx\,,$$

где $Y^{(k)}$ — производная по x: $Y^{(k)} = y^{(k)} + t\eta^{(k)}$. Как и ранее, в силу экстремальности интеграла при $t = 0$,

$$I'(0) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \cdot \eta^{(n)} \Big)\, dx = 0\,.$$

Интегрируя по частям в каждом слагаемом соответствующее число раз (k-ое слагаемое интегрируется $(k-1)$ раз), перебрасывая производные с функции η на производные от F, приходим к равенству

$$I'(0) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\Big) \Big] \eta\, dx = 0\,,$$

внеинтегральные члены обращаются в ноль ввиду нулевых граничных условий для функции η и ее производных. В силу основной леммы (вариант, допускающий гладкость функции η любого конечного порядка, см. стр. 26), заключаем, что

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\Big) = 0\,.$$

5.4. Свободные концы

5.4.1. Естественные условия

Обратимся к задаче с свободными концами. Для начала найдем экстремали интеграла

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx\,,$$

удовлетворяющие граничному условию

$$y(x_1) = y_1\,,$$

условия же для $y(x_2)$ нет. Как и ранее полагаем

$$Y(x) = y(x) + t\eta(x)\,,$$

где y — экстремаль задачи и

$$\eta(x_1) = 0\,.$$

Условия гладкости стандартные: функции F и y считается дважды непрерывно дифференцируемой, функция η — непрерывно дифференцируемой.

Подставляя сравниваемую функцию Y в интеграл, получаем функцию переменной t

$$I(t) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y')\, dx\,.$$

Нулевая вариация

$$I'(0) = 0$$

как и ранее является необходимым условием экстремальности, при этом

$$I'(0) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' \Big)\, dx = 0\,.$$

Однако интегрирование по частям в втором слагаемом на этот раз ведет к равенству

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta\right)\bigg|_{x=x_2}+\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\right]dx=0\,. \tag{5.6}$$

Как и ранее η — произвольная, в частности, возможно взять функцию η, удовлетворяющую нулевому условию в точке x_2: $\eta(x_2)=0$, что уничтожает внеинтегральный член. Тогда по основной лемме снова приходим к уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\,.$$

При выполнении уравнения Эйлера–Лагранжа уравнение (5.6) сводится к равенству

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta\right)\bigg|_{x=x_2}=0\,.$$

Выбирая теперь функцию η так, чтобы $\eta(x_2)=1$, получаем *естественное* условие на правом конце

$$\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{x=x_2}=0\,. \tag{5.7}$$

Если бы левый конец был также свободным, мы получили бы аналогичное естественное условие на левом конце

$$\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{x=x_1}=0\,.$$

5.4.2. Задача о навигации

Вернемся к задаче о навигации (1.20):

$$F=\frac{\sqrt{c^2(1+y'^2)-v^2}-vy'}{c^2-v^2}\,.$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 62 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Поскольку F не зависит явно от y, выписываем первый интеграл

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1\,,$$

т.е.

$$\frac{1}{c^2 - v^2}\left[\frac{c^2 y'}{\sqrt{c^2(1+y'^2) - v^2}} - v\right] = C_1\,.$$

Но в силу естественного условия (5.7) находим: $C_1 = 0$. Как следствие,

$$\begin{aligned} c^2 y' &= v\sqrt{c^2(1+y'^2) - v^2} && \Rightarrow \\ c^4 y'^2 &= v^2 c^2 (1+y'^2) - v^4 && \Rightarrow \\ c^2(c^2 - v^2) y'^2 &= v^2(c^2 - v^2) && \Rightarrow \\ y' &= \frac{v}{c} && \Rightarrow \\ y &= \frac{1}{c}\int\limits_0^x v(s)ds\,. \end{aligned}$$

Если предположить, например, что $v(b) = 0$ (отсутствие течения у берега), то и $y'(b) = 0$, что означает, что «приставать» к берегу надо перпендикулярно.

5.4.3. Условия трансверсальности

Задача со свободными концами может рассматриваться без обязательной привязки концов к вертикальным прямым. Будем искать экстремали интеграла

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx\,,$$

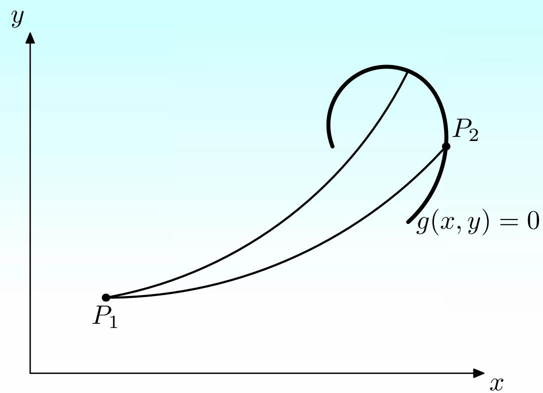


Рис. 9: К условиям трансверсальности

считая, что

$$y(x_1) = y_1\,, \tag{5.8}$$

и определяя верхний предел интегрирования x_2 как абсциссу точки пересечения кривой $y = y(x)$ с заданной кривой вида

$$g(x, y) = 0\,, \tag{5.9}$$

см. рис. 9. Мы будем считать функцию g — непрерывно дифференцируемой, а функции F и y — дважды непрерывно дифференцируемыми.

Пусть y — экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям (5.8)-(5.9), в частности

$$g(x_2, y_2) = 0\,, \qquad y_2 = y(x_2)\,.$$

Введем, как всегда, однопараметрическое семейство функций сравнения

$$Y(x) = y(x) + t\eta(x)\,,$$

считая, что η — непрерывно дифференцируемая функция. Кривая $y = Y(x)$ также должна удовлетворять условиям (5.8)-(5.9). Это означает, что, во-первых,

$$\eta(x_1) = 0\,,$$

и во-вторых,

$$g(X_2, Y_2) = 0\,, \tag{5.10}$$

где $Y_2 = y(X_2) + t\eta(X_2)$. Уравнение (5.10) при фиксированной вариации η должно выполняться тождественно по t, таким образом

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial X_2} \cdot \frac{dX_2}{dt} + \frac{\partial g}{\partial Y_2} \cdot \frac{dY_2}{dt}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial X_2} \cdot \frac{dX_2}{dt} + \frac{\partial g}{\partial Y_2} \left[\frac{dy}{dX_2} \cdot \frac{dX_2}{dt} + \eta(X_2) + t \frac{d\eta}{dX_2} \cdot \frac{dX_2}{dt} \right] = 0\,,$$

откуда

$$\frac{dX_2}{dt} = -\frac{\eta(X_2) \cdot \frac{\partial g}{\partial Y_2}}{\frac{\partial g}{\partial X_2} + y'(X_2) \cdot \frac{\partial g}{\partial Y_2} + t\eta'(X_2) \frac{\partial g}{\partial Y_2}}\,,$$

а при $t = 0$

$$\left. \frac{dX_2}{dt} \right|_{t=0} = -\left. \frac{\eta \cdot \frac{\partial g}{\partial y_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2} + y' \cdot \frac{\partial g}{\partial y_2}} \right|_{x=x_2}. \tag{5.11}$$

Подставим в функционал I вместо y функцию для сравнения Y:

$$I(t) = \int_{x_1}^{X_2} F(x, Y, Y')\, dx\,.$$

Условие экстремальности интеграла I при $t = 0$ запишется, как всегда,

$$I'(0) = 0\,.$$

Используя формулу (3.8) дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, найдем

$$I'(t) = \left(\frac{dX_2}{dt}\cdot F\right)\Big|_{x=X_2} + \int\limits_{x_1}^{X_2}\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\cdot\eta + \frac{\partial F}{\partial Y'}\cdot\eta'\right)dx$$

$$= \left(\frac{dX_2}{dt}\cdot F + \frac{\partial F}{\partial Y'}\cdot\eta\right)\Big|_{x=X_2} + \int\limits_{x_1}^{X_2}\left[\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial Y'}\right)\right]\eta\,dx\,,$$

и при $t=0$

$$I'(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\frac{\partial g}{\partial y_2}\cdot F}{\frac{\partial g}{\partial x_2} + y'\cdot\frac{\partial g}{\partial y_2}}\right)\eta\Big|_{x=x_2} + \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta\,dx = 0\,. \qquad (5.12)$$

Положим сначала $\eta(x_2)=0$. Тогда имеет место уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\,.$$

Считая теперь, что уравнение Эйлера–Лагранжа выполнено, положим в (5.12) $\eta(x_2)=1$. Тогда получаем условие

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\frac{\partial g}{\partial y_2}\cdot F}{\frac{\partial g}{\partial x_2} + y'\cdot\frac{\partial g}{\partial y_2}}\right)\Big|_{x=x_2} = 0\,, \qquad (5.13)$$

которое называется *условием трансверсальности* экстремали и кривой (5.9). Заметим, что если кривая (5.9) задана явно

$$y=\varphi(x)\ : \qquad g(x,y) = \varphi(x) - y\,, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \varphi'\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -1\,,$$

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 66 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

то условие трансверсальности примет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{F}{\varphi' - y'}\right)\Bigg|_{x=x_2} = 0\,, \qquad (5.14)$$

или

$$\bigl[F(x,y,y') + \bigl(\varphi'(x) - y'(x)\bigr)F'_{y'}(x,y,y')\bigr]\Big|_{x=x_2} = 0\,. \qquad (5.15)$$

Отметим, что условие трансверсальности выполняется для экстремали, *пересекающей* кривую (5.9), а не касающейся ее ($y' \neq \varphi'$), отсюда и название.

Аналогичное условие возникнет и для левого конца, если ему разрешить меняться на какой–нибудь заданной кривой.

Посмотрим, что означает условие трансверсальности в случае функции Лагранжа F вида

$$F(x,y,z) = H(x,y)\sqrt{1+z^2}\,.$$

Ограничимся явным заданием кривой. В этом случае в точке свободного конца

$$H\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{H\sqrt{1+y'^2}}{\varphi' - y'} = 0\,,$$

откуда (считая, что $H \neq 0$)

$$\varphi' y' - y'^2 + 1 + y'^2 = 0\,,$$

т.е.

$$\varphi' y' = -1\,.$$

Но это есть в точности условие ортогональности экстремали $y = y(x)$ и кривой свободного конца $y = \varphi(x)$.

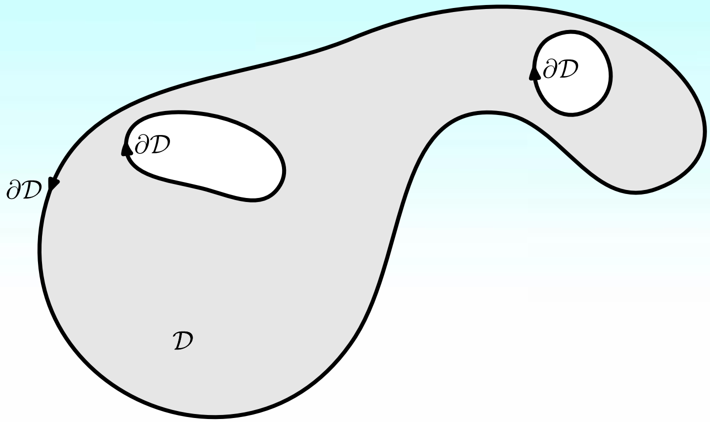


Рис. 10: Ориентация границы

5.5. Случай кратных интегралов

5.5.1. Экстремали двойного интеграла

5.5.1.1. Уравнение Эйлера Рассмотрим двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathcal{D}} F(x, y, z, z'_x, z'_y)\, dxdy \tag{5.16}$$

по области $\mathcal{D}$ плоскости xy. Функция Лагранжа F считается дважды непрерывно дифференцируемой. Область $\mathcal{D}$ считается замкнутой и ограниченной, с границей, состоящей из конечного числа гладких замкнутых кривых, ориентированных стандартно, см. рис. 10. Нас будет интересовать дифференциальное уравнение (в частных

производных), которому должна удовлетворять дважды непрерывно дифференцируемая функция $z(x,y)$, доставляющая интегралу (5.16) экстремальное значение. Предполагается, что функция z принимает на границе области $\partial\mathcal{D}$ заданные значения:

$$z(x,y)\Big|_{\partial\mathcal{D}} = f(x,y)\,, \qquad (x,y)\in\partial\mathcal{D}\,. \tag{5.17}$$

Как и ранее, будем считать, что $z(x,y)$ — функция, доставляющая решение поставленной задаче, и введем однопараметрическое семейство функций сравнения

$$Z(x,y) = z(x,y) + t\zeta(x,y)\,,$$

где вариация функции ζ является непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей нулевым граничным условиям

$$\zeta(x,y)\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0\,. \tag{5.18}$$

Заменяя z в интеграле на Z, приходим к функции одной вещественной переменной

$$I(t) = \iint\limits_{\mathcal{D}} F(x,y,Z,Z'_x,Z'_y)\,dxdy$$

с условием экстремальности при $t=0$:

$$I'(0) = 0\,.$$

Согласно теореме дифференцирования интеграла, зависящего от параметра

$$I'(t) = \iint\limits_{\mathcal{D}} \Big(\frac{\partial F}{\partial Z}\cdot\zeta + \frac{\partial F}{\partial Z'_x}\cdot\zeta'_x + \frac{\partial F}{\partial Z'_y}\cdot\zeta'_y\Big)\,dxdy\,.$$

При $t=0$ получаем равенство

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \Big(\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\zeta + \frac{\partial F}{\partial z'_x}\cdot\zeta'_x + \frac{\partial F}{\partial z'_y}\cdot\zeta'_y\Big)\,dxdy = 0\,. \tag{5.19}$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 69 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Воспользуемся формулой Грина

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy\,.$$

Тогда

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\cdot\zeta\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_y}\cdot\zeta\right)\right] dxdy = \oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial z'_x}\cdot\zeta dy - \frac{\partial F}{\partial z'_y}\cdot\zeta dx\,,$$

откуда в силу нулевых граничных условий для функции ζ (что обращает в ноль интеграл по границе области)

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial F}{\partial z'_x}\cdot\zeta'_x + \frac{\partial F}{\partial z'_y}\cdot\zeta'_y\right] dxdy = -\iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_y}\right)\right]\cdot\zeta\, dxdy\,.$$

Учет последнего равенства в (5.19) ведет к равенству

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_y}\right)\right]\cdot\zeta\, dxdy = 0\,,$$

и, в силу основной леммы (ввиду произвольности ζ), — к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_y}\right) = 0\,. \tag{5.20}$$

5.5.1.2. Естественное условие на границе Мы можем легко расширить результат предыдущего пункта на случай отсутствия условий на границе области. Вариация интеграла запишется в виде

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial z'_x}\cdot\zeta dy - \frac{\partial F}{\partial z'_y}\cdot\zeta dx + \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_y}\right)\right]\cdot\zeta\, dxdy = 0\,.$$

Считая уравнение Эйлера выполненным и параметризуя контур интегрирования ∂D:

$$x = x(s)\,, \quad y = y(s)\,, \quad s \in [s_1, s_2]\,,$$

приходим к равенствам

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial z'_x} \cdot \zeta dy - \frac{\partial F}{\partial z'_y} \cdot \zeta dx = \int\limits_{s_1}^{s_2} \Big(\frac{\partial F}{\partial z'_x} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial z'_y} \cdot \frac{dx}{ds} \Big) \zeta\, ds = 0\,,$$

откуда в силу основной леммы

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial z'_y} \cdot \frac{dx}{ds} \right)\Bigg|_{\partial D} = 0\,. \tag{5.21}$$

Если условия на границе охватывают лишь часть границы, то равенство

$$\frac{\partial F}{\partial z'_x} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial z'_y} \cdot \frac{dx}{ds} = 0$$

должно выполняться, очевидно, для оставшейся части границы. Отметим, что геометрически полученное условие означает, что вектор

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\,, \frac{\partial F}{\partial z'_y} \right)$$

является касательным к границе ∂D, т.к. вектор $(\dot y, -\dot x)$ ей перпендикулярен.

5.5.1.3. Волновое уравнение Рассмотрим струну, натянутую вдоль оси x и совершающую колебания в плоскости xu, перпендикулярно к оси x. Концы струны будем считать закрепленными в точках $(0,0)$ и $(l,0)$. Считая струну абсолютно

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля

Веб – страница
Титульный лист
Страница 71 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

упругой, найдем потенциальную энергию как работу сил деформации, идущую на растяжение, т.е.

$$V = \tau\Big(\int\limits_0^l \sqrt{1+u_x'^2}\,dx - l\Big) \approx \frac{\tau}{2}\int\limits_0^l u_x'^2\,dx\,,$$

где τ — натяжение струны.

Кинетическая энергия струны выражается интегралом

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \rho u_t'^2\,dx\,,$$

где ρ — (линейная) плотность струны.

Согласно вариационному принципу Гамильтона колебания $u(x,t)$ струны на временном интервале $[t_1, t_2]$ являются экстремалями функционала

$$I = \int\limits_{t_1}^{t_2} (T - V)\,dt\,,$$

т.е. функционала

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^l (\rho u_t'^2 - \tau u_x'^2)\,dxdt\,.$$

Уравнение Эйлера для данного функционала ведет к хорошо известному волновому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t') - \frac{\partial}{\partial x}(\tau u_x') = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad a = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\,.$$

5.5.2. Экстремали тройного интеграла

5.5.2.1. Уравнение Эйлера Рассмотрим тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{D}} F(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z)\, dxdydz \tag{5.22}$$

по области $\mathcal{D}$ пространства xyz. Функция Лагранжа F считается дважды непрерывно дифференцируемой. Область $\mathcal{D}$ считается замкнутой и ограниченной, с границей, состоящей из конечного числа гладких замкнутых поверхностей, ориентированных стандартно (т.е. фиксируется внешняя сторона поверхности).

Нас интересует дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y, z)$, доставляющая интегралу (5.22) экстремальное значение. Предполагается, что функция u принимает на границе области $\partial\mathcal{D}$ заданные значения:

$$u(x, y, z)\Big|_{\partial\mathcal{D}} = f(x, y, z)\,, \qquad (x, y, z) \in \partial\mathcal{D}\,. \tag{5.23}$$

Как и ранее, будем считать, что $u(x, y, z)$ — функция, доставляющая решение поставленной задаче, и введем однопараметрическое семейство функций сравнения

$$U(x, y, z) = u(x, y, z) + tv(x, y, z)\,,$$

где вариация функции v является непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей нулевым граничным условиям

$$v(x, y, z)\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0\,. \tag{5.24}$$

Заменяя u в интеграле на U, приходим к функции одной вещественной переменной

$$I(t) = \iint\limits_{\mathcal{D}} F(x, y, z, U, U'_x, U'_y, U'_z)\, dxdydz$$

с условием экстремальности при $t = 0$:

$$I'(0) = 0\,.$$

Согласно теореме дифференцирования интеграла, зависящего от параметра

$$I'(t) = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \cdot \upsilon + \frac{\partial F}{\partial U'_x} \cdot \upsilon'_x + \frac{\partial F}{\partial U'_y} \cdot \upsilon'_y + \frac{\partial F}{\partial U'_z} \cdot \upsilon'_z \right) dx dy dz\,.$$

При $t = 0$ получаем равенство

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \upsilon + \frac{\partial F}{\partial u'_x} \cdot \upsilon'_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y} \cdot \upsilon'_y + \frac{\partial F}{\partial u'_z} \cdot \upsilon'_z \right) dx dy dz = 0\,. \tag{5.25}$$

Воспользуемся формулой Гаусса–Остроградского

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint\limits_{\partial\mathcal{D}} P\, dy dz + Q\, dx dz + R\, dx dy\,.$$

Тогда

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_x} \cdot \upsilon \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_y} \cdot \upsilon \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_z} \cdot \upsilon \right) \right] dx dy dz$$

$$= \iint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial u'_x} \cdot \upsilon\, dy dz + \frac{\partial F}{\partial u'_y} \cdot \upsilon\, dx dz + \frac{\partial F}{\partial u'_z} \cdot \upsilon\, dx dy\,,$$

откуда в силу нулевых граничных условий для функции υ (что обращает в ноль

интеграл по границе области)

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial F}{\partial u'_x} \cdot v'_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y} \cdot v'_y + \frac{\partial F}{\partial u'_z} \cdot v'_z\right] dxdydz$$

$$= -\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_z}\right)\right] \cdot v\, dxdydz\,.$$

Учет последнего равенства в (5.25) ведет к равенству

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_z}\right)\right] \cdot v\, dxdydz = 0\,,$$

и, в силу основной леммы (ввиду произвольности v), — к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_z}\right) = 0\,. \tag{5.26}$$

5.5.2.2. Естественное условие на границе Расширяя результат предыдущего пункта на случай отсутствия условий на границе области, приходим к равенствам

$$\iint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial u'_x} \cdot v\, dydz + \frac{\partial F}{\partial u'_y} \cdot v\, dxdz + \frac{\partial F}{\partial u'_z} \cdot v\, dxdy$$

$$= \iint\limits_{\partial D} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial u'_y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial F}{\partial u'_z} \cdot \cos\gamma\right) v\, dS = 0\,,$$

откуда в силу основной леммы

$$\left.\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial u'_y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial F}{\partial u'_z} \cdot \cos\gamma\right)\right|_{\partial D} = 0\,. \tag{5.27}$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 75 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

6. Задачи на условный экстремум

6.1. Изопериметрическая задача

6.1.1. Простейшая изопериметрическая задача

Пусть кривая $y = y(x)$ с фиксированными концами

$$y(x_1) = y_1\,, \qquad y(x_2) = y_2\,,$$

является решением следующей задачи. Интеграл

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

достигает на этой кривой своего минимального (максимального) значения, причем интеграл

$$J = \int\limits_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')\,dx$$

обладает заранее заданным значением. Функции F, G и y считаются дважды непрерывно дифференцируемыми. Какому дифференциальному уравнению должна удовлетворять кривая y?

В отличие от предыдущих задач при варьировании функции y, считая, что функция y удовлетворяет поставленной задаче, не достаточно однопараметрического семейства, поскольку изменение одного единственного параметра будет, вообще говоря, изменять интеграл J.

Итак, введем двухпараметрическое семейство

$$Y(x) = y(x) + t_1\eta_1(x) + t_2\eta_2(x)\,,$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 76 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

где η_1, η_2 — непрерывно дифференцируемые функции, причем

$$\eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = \eta_2(x_1) = \eta_2(x_2) = 0\,.$$

Нулевые граничные условия на вариации η_1, η_2 обеспечивают выполнение равенств

$$Y(x_1) = y_1\,, \qquad Y(x_2) = y_2\,.$$

Замещая y на Y в интегралах I и J, получаем две функции от двух вещественных переменных каждая:

$$I(t_1, t_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y')\,dx\,,$$

$$J(t_1, t_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} G(x, Y, Y')\,dx\,,$$

где, как всегда, $Y' = y' + t_1\eta_1' + t_2\eta_2'$, функции η_1, η_2 — фиксированы. Ясно, что параметры t_1 и t_2 не являются независимыми, т.к. интеграл J сохраняет постоянное значение:

$$J(t_1, t_2) = J_0 = \mathrm{Const}\,.$$

Вместе с тем при $t_1 = t_2 = 0$ интеграл I достигает своего экстремального значения.

Мы видим, что поставленная выше задача на экстремум функции $I(t_1, t_2)$ при условии постоянства функции $J(t_1, t_2)$ является типичной задачей на условный экстремум.

Согласно методу Лагранжа решения задач на условный экстремум введем функцию Лагранжа

$$K(t_1, t_2, \lambda) = I(t_1, t_2) + \lambda J(t_1, t_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} H(x, Y, Y')\,dx\,,$$

где $H = F + \lambda G$. Переменная λ называется множителем Лагранжа. Правило множителей Лагранжа утверждает, что экстремальные значения исходной задачи на условный экстремум являются решениями системы:

$$\frac{\partial K}{\partial t_1} = 0\,, \quad \frac{\partial K}{\partial t_2} = 0\,, \quad J = J_0\,.$$

Вычисляя

$$\frac{\partial K}{\partial t_j} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial H}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t_j} + \frac{\partial H}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial t_j}\Big]\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial H}{\partial Y}\cdot\eta_j + \frac{\partial H}{\partial Y'}\cdot\eta_j'\Big]\,dx\,,$$

$j = 1, 2$; при $t_1 = t_2 = 0$ находим

$$\frac{\partial K}{\partial t_j}\Big|_{t_1=t_2=0} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial H}{\partial y}\cdot\eta_j + \frac{\partial H}{\partial y'}\cdot\eta_j'\Big]\,dx = 0\,.$$

Интегрируя по частям во вторых слагаемых и учитывая обращение в ноль внеинтегральных членов (в силу нулевых граничных условий для функций η_j), приходим к равенствам

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial H}{\partial y'}\Big)\Big]\eta_j\,dx = 0\,.$$

В силу произвольности функций η_j эти равенства, по-сути, эквивалентны и согласно основной лемме введут к уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial H}{\partial y'}\Big) = 0\,.$$

6.1.2. Прямые обобщения

6.1.2.1. Несколько условий В более общих изопериметрических задачах приходится искать экстремали функционала

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$$

при условии, что интегралы

$$J_k = \int_{x_1}^{x_2} G_k(x, y, y')\, dx\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

сохраняют заданные значения. Вводя $(n+1)$-параметрическое семейство функций сравнения $Y = y + \sum t_j \eta_j$, мы как и выше придем к уравнению Эйлера–Лагранжа для функции Лагранжа

$$H = F + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k G_k\,,$$

зависящей от n множителей Лагранжа.

6.1.2.2. Свободные концы Если разрешить концам экстремалей передвигаться по заданным кривым, мы как и в безусловной вариационной задаче придем к условиям трансверсальности для каждого свободного конца, но, разумеется, относительно функции Лагранжа H, зависящей от множителей Лагранжа.

6.1.2.3. Несколько функций Наконец, имеется прямое обобщение для задач с несколькими искомыми функциями, ведущее к системе уравнений Эйлера–Лагранжа для функции Лагранжа H.

6.1.3. Задача Дидоны

6.1.3.1. Параметрическая форма Рассмотрим задачу об отыскании плоской замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей наибольшую площадь. Сама постановка задачи диктует поиск таких кривых в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,. \end{cases} \qquad t \in [t_1, t_2]\,,$$

где

$$x(t_1) = x(t_2) = x_1\,, \qquad y(t_1) = y(t_2) = y_2\,.$$

Искомые кривые должны доставлять наибольшее значение интегралу

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt\,,$$

при условии, что их длина

$$J = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

задана.

Система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right) = 0\,,$$

где

$$H = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{2} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,.$$

Вычисляем:

$$\frac{\dot y}{2} - \frac{d}{dt}\left[-\frac{y}{2} + \frac{\lambda \dot x}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}\right] = 0\,,$$
$$-\frac{\dot x}{2} - \frac{d}{dt}\left[\frac{x}{2} + \frac{\lambda \dot y}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}\right] = 0\,.$$

Отсюда легко находим первые интегралы системы

$$y - \frac{\lambda \dot x}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}} = C_1\,,$$
$$x + \frac{\lambda \dot y}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}} = C_2\,.$$

Система легко интегрируется

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \frac{\lambda^2 \dot x^2}{\dot x^2 + \dot y^2} + \frac{\lambda^2 \dot y^2}{\dot x^2 + \dot y^2} = \lambda^2\,,$$

Таким образом искомые кривые являются окружностями

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \lambda^2\,,$$

где $2\pi\lambda = J$.

6.1.3.2. Упражнение Вернемся к исходной постановке задачи Дидоны, см. стр. 15. В силу свойства инвариантности, см. стр. 57, экстремалью будет дуга окружности, проходящая через точки P_1 и P_2.

Найдите центр и радиус этой окружности.

6.2. Задача Лагранжа

6.2.1. Простейший случай

Рассмотрим еще один вид вариационных задач на условный экстремум, называемых задачами Лагранжа. Пусть пространственная кривая $y = y(x)\,, z = z(x)$, соединяющая фиксированные точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ и лежащая на данной поверхности, заданной уравнением

$$G(x, y, z) = 0\,, \tag{6.1}$$

доставляет минимум интегралу

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z')\,dx\,. \tag{6.2}$$

Какому дифференциальному соотношению должны подчиняться функции y и z?

Мы будем полагать функции y, z, F, G — дважды непрерывно дифференцируемыми и считать, что производные

$$\frac{\partial G}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial G}{\partial z} \tag{6.3}$$

не обращаются в ноль одновременно.

Заметим, что если поверхность (6.1) может быть описана явно уравнением

$$z = z(x, y)\,,$$

то поставленная задача сводится к простейшей задаче вариационного исчисления. Однако практически более полезен прием, стандартный для задач на условный экстремум.

Веб – страница
Титульный лист
Страница 82 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Теорема 6.1 (Метод Лагранжа). *Существует функция $\lambda(x)$ такая, что кривая $y = y(x)$, $z = z(x)$ является экстремалью задачи на безусловный экстремум функционала*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (F - \lambda G)\, dx\,.$$

Доказательство. Пусть кривая $y = y(x)$, $z = z(x)$ является решением задачи Лагранжа. Построим, как всегда, однопараметрическое семейство сравнимых кривых $Y = y + t\eta$, $Z = z + t\zeta$, где функции η и ζ являются непрерывно дифференцируемыми, удовлетворяющими нулевым граничным условиям. Получим функции переменной t:

$$I(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Z, Y', Z')\, dx\,,$$

$$g(t) = G(x, Y, Z)\,,$$

причем

$$I'(0) = 0\,, \qquad g(t) \equiv 0\,.$$

Тогда

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \zeta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' + \frac{\partial F}{\partial z'} \cdot \zeta' \right) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta + \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) \right] \zeta \right\} dx = 0\,,$$

причем тождественно по x

$$g'(0) = \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \zeta = 0\,.$$

Последнее означает, что функции η и ζ не являются произвольными. Фиксируем произвольно точку x_0 внутри интервала $[x_1, x_2]$. Предположим, для определенности, что в этой точке, а значит, в некоторой окрестности $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ этой точки

$$\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0\,.$$

Выберем функцию η произвольно так, чтобы вне окрестности $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ она тождественно обращалась в ноль. При этом функция ζ определяется равенством

$$\zeta = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}} \cdot \eta\,.$$

Подстановка в вариацию $I'(0)$ дает

$$\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left\{\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] - \frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}}\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\right\}\eta\, dx = 0\,.$$

В силу основной леммы в окрестности точки x_0 выражение в фигурных скобках обращается в ноль, т.е.

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}}\,.$$

В виду произвольности выбора точки x_0, выписанное равенство выполняется при всех x из интервала $[x_1, x_2]$. Остается положить

$$\lambda(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}}$$

и переписать эту систему в виде

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) = 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} - \lambda \cdot \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial z'}\Big) = 0\,,$$

но это и есть уравнения Эйлера для функционала J ввиду независимости G от производных. □

6.2.2. Отыскание геодезических

В качестве приложений, посмотрим на задачу об отыскании геодезических как на задачу Лагранжа. Иначе говоря, рассмотрим задачу о наименьшем значении интеграла

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

при условии

$$G(x, y, z) = 0\,.$$

По правилу множителей Лагранжа эта задача сводится к задаче на безусловный экстремум функционала

$$J = \int\limits_{x_1}^{x_2} [\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \lambda G]\, dx\,.$$

Уравнения Эйлера для последнего дадут

$$\lambda \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0\,, \qquad \lambda \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0\,.$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 85 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Напомним, что вектор

$$\vec{\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right)$$

является единичным касательным вектором к кривой

$$y = y(x), \quad z = z(x).$$

Далее, в силу $\vec{\tau}^{\,2} = 1$,

$$2\vec{\tau}\,' \cdot \vec{\tau} = 0,$$

откуда

$$\vec{\tau}\,' = \kappa \vec{n},$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к кривой и называемый вектором главной нормали, а κ — кривизна кривой. Уравнения Эйлера примут вид

$$\lambda \frac{\partial G}{\partial y} + \kappa n_2 = 0, \; \lambda \frac{\partial G}{\partial z} + \kappa n_3 = 0.$$

Заметим, также, что $\operatorname{grad} G$ является вектором, ортогональным к поверхности $G = 0$ и, в частности, перпендикулярным к вектору $\vec{\tau}$:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot z' = 0.$$

Уравнения Эйлера ведут к пропорциональности векторов $\operatorname{grad} G$ и $\vec{n}$. Действительно, иначе вектор

$$\operatorname{grad} G \times \vec{n}$$

был бы ненулевым и параллельным вектору $\vec{\tau}$, но это не так в ввиду

$$(\operatorname{grad} G \times \vec{n})_1 = \frac{\partial G}{\partial y} n_2 - \frac{\partial G}{\partial z} n_3 = 0, \quad \tau_1 \neq 0.$$

Итак, главные нормали к геодезическим совпадают с нормалями к поверхности.

6.2.3. Общий случай

В общем случае задача Лагранжа ставится так. Найти минимизирующие функции $y_1, \dots, y_n$ интеграла

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)\, dx \tag{6.4}$$

при условии, что

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0\,, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ G_k(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0\,. \end{cases} \tag{6.5}$$

$k < n\,.$

Уравнения (6.5) носят название связей. Если функции $G_1\,, \dots, G_k$ не зависят от производных, так что условия (6.5) имеют вид

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \dots, y_n) = 0\,, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ G_k(x, y_1, \dots, y_n) = 0\,, \end{cases} \tag{6.6}$$

связи называются голономными.

Как и выше, будем считать, что $y_1, \dots, y_n$ являются решениями поставленной задачи и введем функции для сравнения

$$Y_1 = y_1 + t\eta_1\,, \dots, Y_k = y_k + t\eta_k\,,$$

считая, что вариации $\eta_1, \dots, \eta_k$ являются непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяющими нулевым граничным условиям. Получим задачу на минимум функции

$$I(t) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, Y_1, \dots, Y_n, Y'_1, \dots, Y'_n)\, dx$$

при условиях

$$g_1(t) = 0\,, \ldots, g_k(t) = 0\,,$$

где

$$g_j(t) = G(x, Y_1, \ldots, Y_k, Y_1', \ldots, Y_k') \qquad (j = 1, \ldots, k)\,.$$

При $t = 0$ находим

$$I'(0) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{\partial F}{\partial y_1} \cdot \eta_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \cdot \eta_n + \frac{\partial F}{\partial y_1'} \cdot \eta_1' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n'} \cdot \eta_1' \Big)\, dx = 0\,,$$

при условиях

$$g_j'(0) = \frac{\partial G_j}{\partial y_1} \cdot \eta_1 + \cdots + \frac{\partial G_j}{\partial y_n} \cdot \eta_n + \frac{\partial G_j}{\partial y_1'} \cdot \eta_1' + \cdots + \frac{\partial G_j}{\partial y_n'} \cdot \eta_n' = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k)\,. \quad (6.7)$$

Поскольку равенства (6.7) являются тождественными по x, мы можем умножить их соответственно на пока произвольные функции $\lambda_j(x)$ и отнять от подынтегральной функции в интеграле $I'(0)$. Получим равенство

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{\partial H}{\partial y_1} \cdot \eta_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial y_n} \cdot \eta_n + \frac{\partial H}{\partial y_1'} \cdot \eta_1' + \cdots + \frac{\partial H}{\partial y_n'} \cdot \eta_1' \Big)\, dx = 0\,, \qquad (6.8)$$

где по определению

$$H = F - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot G_j\,.$$

Проинтегрируем по частям в равенстве (6.8), считая функции λ_j в случае неголономных связей непрерывно дифференцируемыми. Тогда

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \Big(\frac{\partial H}{\partial y_i'} \Big) \Big]\, \eta_i \, dx = 0\,. \qquad (6.9)$$

К сожалению, в силу (6.7) вариации $\eta_1, \ldots, \eta_n$ нельзя считать независимыми. В случае неголономных связей будем считать, что

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial G_j}{\partial y_i'}\right) = k\,. \tag{6.10}$$

В случае голономных связей условия (6.7) примут вид

$$\frac{\partial G_j}{\partial y_1}\cdot\eta_1 + \cdots + \frac{\partial G_j}{\partial y_n}\cdot\eta_n = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{6.11}$$

и мы будем считать, что

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial G_j}{\partial y_i}\right) = k\,. \tag{6.12}$$

Для удобства дальнейшего изложения перенумерацией переменных $y_1, \ldots, y_n$ добьемся, чтобы при $i \leqslant k$

$$\det\left(\frac{\partial G_j}{\partial y_i'}\right) \neq 0\,, \tag{6.13}$$

а в случае голономных связей, чтобы при $i \leqslant k$

$$\det\left(\frac{\partial G_j}{\partial y_i}\right) \neq 0\,. \tag{6.14}$$

В обоих случаях это позволит считать вариации $\eta_1, \ldots, \eta_k$ функциями от уже произвольных вариаций $\eta_{k+1} \ldots, \eta_n$.

Определим теперь функции $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ так, чтобы при $i = 1, \ldots, k$ были выполнены равенства

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial y_i'}\right) = 0\,.$$

Это возможно в силу выполнения условий (6.13) или (6.14) соответственно. Действительно, в с случае голономных связей мы должны решить алгебраическую систему

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial G_j}{\partial y_i} \cdot \lambda_j = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big) \qquad (i = 1, \ldots, k)\,,$$

а в случае неголономных связей — систему линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial G_j}{\partial y_i'} \cdot \lambda_j' = \sum_{j=1}^{k} \Big[\frac{\partial G_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial G_j}{\partial y_i'}\Big)\Big]\lambda_j - \frac{\partial F}{\partial y_i} + \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big) \qquad (i = 1, \ldots, k)\,.$$

С учетом выбора функций λ_j условия на экстремум (6.9) примут вид

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=k+1}^{n} \Big[\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial H}{\partial y_i'}\Big)\Big] \eta_i \, dx = 0\,,$$

где на этот раз функции η_i — произвольны. В силу основной леммы заключаем, что равенства

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial H}{\partial y_i'}\Big) = 0$$

выполнены и при $i = k+1, \ldots, n$.

Итак, правило множителей Лагранжа в общем случае можно сформулировать как теорему существования функций $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ таких, что решения задачи Лагранжа на условный экстремум являются экстремалями функционала

$$J = \int_{x_1}^{x_2} H \, dx$$

с функцией Лагранжа

$$H = F - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot G_j \,.$$

Часть II

Достаточные условия экстреммума

7. Первое необходимое условие экстремума

7.1. Замечание о достаточных условиях

Мы хотим в дальнейшем немного коснуться вопроса о достаточных условиях. Общее положение здесь такое. В отличии от одномерного случая условия

$$I''(0) > 0$$

на стационарной точке не достаточно для существования минимума. Напомним, как решался вопрос о достаточных условиях минимума в случае функций нескольких переменных. Если функция $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, дважды дифференцируема, то

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} + \frac{1}{2} f''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}^2 + o(|\boldsymbol{h}|^2)\,,$$

где

$$f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} = \langle \boldsymbol{l} | \boldsymbol{h} \rangle\,,$$

$\boldsymbol{l}$ — градиент функции f в точке $\boldsymbol{x}$ и

$$f''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}^2 = \langle H\boldsymbol{h} | \boldsymbol{h} \rangle\,,$$

H — матрица Гесса (матрица вторых частных производных) в точке $\boldsymbol{x}$. Если точка $\boldsymbol{x}$ стационарна (т.е. $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$), а матрица Гесса положительно определена, т.е.

$$\forall \boldsymbol{h}: \qquad \langle H\boldsymbol{h} | \boldsymbol{h} \rangle \geqslant \alpha |\boldsymbol{h}|^2\,, \qquad \alpha > 0\,,$$

то

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) \geqslant (\alpha - \varepsilon)|\boldsymbol{h}|^2\,,$$

где ε можно сделать сколь угодно малым, в частности, меньше чем α, если $\boldsymbol{h}$ достаточно мало.

Описанные оценки, очевидно, не зависят от размерности пространства и могут быть повторены с соответствующими изменениями и в случае интегральных функционалов, если мы надлежащим образом превратим пространство функций y в унитарное (т.е. введем в нем скалярное произведение) или, хотя бы, нормированное.

Следует отметить, что не любая норма на множестве функций y годится для такого анализа в вариационном исчислении. Например, заведомо не подходит, казалось бы, естественная норма вида

$$\|y\| = \max_x |y(x)| + \max_x |y'(x)|\,,$$

так как неравенство

$$\delta^2 I[\eta] \geqslant \alpha \|\eta\|^2\,, \quad \alpha > 0\,,$$

не может выполняться для интегральных функционалов при произвольных вариациях η, см., например, [2].

Конечно, можно указать интегральные нормы, для которых описанные выше оценки уже будут иметь место, тем не менее имеется существенный недостаток описанного выше подхода. Именно, в таком виде он не всегда удобен для приложений: проверка дифференцируемости (дважды) по Фреше и проверка положительной определенности второй вариации могут быть вполне содержательными задачами. Хочется располагать более эффективным критерием достаточности. Вспомним, что даже в случае функций нескольких переменных условие положительной определенности матрицы Гесса формулировалось в форме, удобной для проверки.

В вопросе о достаточных условиях мы встанем на другой путь. Анализируя более внимательно задачу, мы постараемся накопить некоторое число необходимых условий минимума, надеясь, что их количество на некотором этапе перейдет в качество и они составят достаточное условие минимума.

7.2. Первое необходимое условие

Вернемся к анализу первой вариации интегрального функционала I,

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx\,. \tag{7.1}$$

Расширим несколько класс допустимых кривых, считая, что функция $y(x)$ является непрерывной и кусочно гладкой (кусочно непрерывно дифференцируемой), т.е. кривая $y = y(x)$ может иметь угловые точки. Функцию $F(x, y, z)$ можно вначале считать просто непрерывно дифференцируемой. Заметим, что хотя функция y' является разрывной в угловых точках, интеграл I существует как интеграл Римана.

Что в этом случае можно сказать о функции $y(x)$, на которой функционал I достигает наименьшего значения?

Как и ранее, фиксируем вариацию функции y, в данном случае — непрерывную, кусочно гладкую функцию η, обращающуюся в ноль на концах интервала $[x_1, x_2]$, — и составим интеграл

$$I(t) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y + t\eta, y' + t\eta')\, dx\,.$$

Функция $I(t)$ при $t = 0$ достигает минимума. Как следствие,

$$I'(0) = 0\,,$$

где как и ранее

$$I'(0) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\Big)\, dx\,. \tag{7.2}$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 96 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Теперь, однако, в отличие от ранее проведенной процедуры, мы будем интегрировать по частям не во втором, а в первом слагаемом! Введем функцию

$$\Phi(x) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{\partial F}{\partial y}\, dx \equiv \int\limits_{x_1}^{x} F'_y(u, y(u), y'(u))\, du\,, \tag{7.3}$$

тогда

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \eta\, dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \eta(x)\, d\Phi(x) = \eta\Phi\Big|_{x_1}^{x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2} \Phi\eta'\, dx\,,$$

откуда, в силу нулевых граничных условия для функции η, находим

$$I'(0) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{\partial F}{\partial y'} - \Phi\Big)\eta'\, dx = 0\,. \tag{7.4}$$

Теперь мы можем применить лемму Дюбуа-Реймона 2.2 и получить уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \int\limits_{x_1}^{x} \frac{\partial F}{\partial y}\, dx = C\,, \qquad C = \mathrm{Const}\,. \tag{7.5}$$

Мы назовем его *первым необходимым условием*.

Из этого уравнения вытекают три следствия.

Следствие 7.1 (Уравнение Эйлера). *На каждой части минимизирующей кривой $y(x)$, лежащей между двумя соседними угловыми точками, функция*

$$\frac{\partial F}{\partial y'}$$

имеет производную, которая удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться свойствами интеграла (от непрерывной функции) как функции верхнего предела и продифференцировать равенство (7.5) по x. □

Следствие 7.2 (Условие Вейерштрасса-Эрдмана). *Для каждого значения x_0, соответствующего угловой точке минимизирующей кривой $y = y(x)$, правый и левый пределы функции*

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \equiv F'_{y'}(x, y(x), y'(x))$$

совпадают:

$$F'_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0 - 0)) = F'_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0 + 0))\,.$$

Мы будем кратко записывать это в виде

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x-0} = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x+0}.$$

Доказательство. Это опять вытекает из свойства непрерывности интеграла Римана как функции верхнего предела. □

Во многих задачах из этого условия следует, что минимизирующая кривая не имеет угловых точек. Это будет, например, справедливо для всех задач, где функция F имеет вид

$$F(x, y, y') = H(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,,$$

в частности, в задаче о брахистохроне. Действительно, в этом случае

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = H \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,,$$

что в силу условия Вейерштрасса–Эрдмана (и непрерывности H) ведет к равенству

$$\frac{y'(x-0)}{\sqrt{1+y'^2(x-0)}} = \frac{y'(x+0)}{\sqrt{1+y'^2(x+0)}}\,.$$

Но функция

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

является строго возрастающей:

$$\Bigl(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigr)' = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} > 0\,.$$

Это влечет ее обратимость и, как следствие, равенство

$$y'(x-0) = y'(x+0)\,,$$

т.е. непрерывную дифференцируемость функции $y(x)$.

Следствие 7.3 (Условие Гильберта). *Если функция F — дважды непрерывно дифференцируема, то за исключением угловых точек и точек, где*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0\,,$$

минимизирующая функция $y(x)$ также дважды непрерывно дифференцируема. Более того, если функция F непрерывно дифференцируема n раз, то функция y также непрерывно дифференцируема n раз.

Доказательство. Фиксируем неугловую точку $(x_0, y(x_0))$ минимизирующей функции $y = y(x)$. Заметим, что в окрестности точки x_0 функция $y'(x)$ непрерывна. Положим

$$G(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial z} - \Phi(x) - C\,, \qquad F = F(x, y, z)\,,$$

где функция Φ определена в (7.3), и пусть

$$H(x, u) = G(x, y(x), z)\,, \tag{7.6}$$

где $y(x)$ — минимизирующая функция. В силу двукратной дифференцируемости функции F (в окрестности неугловой точки) функция H — непрерывно дифференцируема. Если теперь

$$\frac{\partial H}{\partial z} \neq 0$$

в окрестности точки некоторой точки (x_0, z_0), уравнение

$$H(x, z) = 0\,,$$

по теореме о неявной функции, в окрестности точки x_0 однозначно определяет функцию

$$z = z(x)\,,$$

такую, что $z(x_0) = z_0$, причем $z(x)$ — непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0. Напомним, что производная функции z может быть вычислена по формуле

$$\frac{dz}{dx} = z_1\,, \qquad z_1 = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial z}}\,, \tag{7.7}$$

которая описывает функцию z' как сложную

$$z' = z_1(x, z)\,, \qquad z = z(x)\,.$$

Остается заметить, что

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

и функция $z = y'(x)$ является, в силу (7.5), решением уравнения

$$H(x, z) = 0\,,$$

в частности — в окрестности точки $(x_0, y'(x_0))$. Если в точке $(x_0, y(x_0), y'(x_0))$ выполнено условие

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0\,,$$

то заключаем, что функция $z = y'(x)$ является как раз той однозначно определенной непрерывно дифференцируемой функцией, существование которой гарантируется теоремой о неявной функции. Но это в точности означает двукратную непрерывную дифференцируемость функции $y(x)$.

Если теперь функция F допускает трехкратное непрерывное дифференцирование, то функция H (7.6), в силу уже доказанной двукратной дифференцируемости функции y, — дважды непрерывно дифференцируема. Как следствие, функция z_1 непрерывно дифференцируема и в силу формулы (7.7), получим

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}\,,$$

что доказывает трехкратную непрерывную дифференцируемость функции y.

Последнее рассуждение может быть воспроизведено с соответствующими изменениями для доказательства четырехкратной непрерывной дифференцируемости функции y, если функция F является непрерывно дифференцируемой четыре раза, и т.д. $\square$

Замечание 7.4. Условие Гильберта не применимо к угловым точкам, но в условиях следствия 7.3 функция y'' имеет односторонние пределы $y''(x \pm 0)$ в угловых точках,

как это с очевидностью вытекает из развернутой формы уравнения Эйлера (3.14): правая часть в равенстве

$$y'' = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}$$

обладает указанным свойством.

Нетрудно получить еще одно уравнение, описывающее минимизирующую функцию $y(x)$. Для этого запишем уравнение этой кривой в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \tau\,, \\ y = y(\tau)\,, \end{cases} \qquad \tau \in [x_1, x_2]\,,$$

и заметим, что эта кривая доставляет минимум интегралу

$$I = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} F\Big(X, Y, \frac{Y'}{X'}\Big) X'\, d\tau$$

среди всех кривых

$$\begin{cases} x = X(\tau)\,, \\ y = Y(\tau)\,, \end{cases} \qquad \tau \in [\tau_1, \tau_2]\,,$$

соединяющих концы кривой $y = y(x)$ при условии $X' > 0$, что является следствием замены переменной $x = X(\tau)$ в интеграле I. Далее достаточно фиксировать

$$Y(\tau) = y(\tau)\,.$$

Получим интегральный функционал

$$I[X] = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} G(\tau, X, X')\, d\tau\,,$$

где

$$G(\tau, X, X') = F\Big(X, y, \frac{y'}{X'}\Big) X' .$$

Выпишем для него первое необходимое условие (7.5): при $X = \tau$ (как следствие, $\tau_1 = x_1$)

$$\frac{\partial G}{\partial X'} - \int\limits_{x_1}^{\tau} \frac{\partial G}{\partial X}\, d\tau = C\,, \qquad C = \mathrm{Const}\,,$$

откуда с учетом

$$\frac{\partial G}{\partial X'} = F + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{-y'}{X'^2} \cdot X'\,, \qquad \frac{\partial G}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot X'\,,$$

где правая часть равенства должна вычисляться в точке

$$(x, y, z) = \Big(X, y, \frac{y'}{X'}\Big)\,,$$

находим

$$F - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{y'}{X'} - \int\limits_{x_1}^{\tau} \frac{\partial F}{\partial x} \cdot X'\, d\tau = C\,, \qquad C = \mathrm{Const}\,,$$

и окончательно, ввиду $X' = 1$ и $\tau = x$,

$$F - y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} - \int\limits_{x_1}^{x} \frac{\partial F}{\partial x}\, dx = C\,, \qquad C = \mathrm{Const}\,. \tag{7.8}$$

Мы назовем это равенство *вторым вариантом первого необходимого условия*.

Как и выше из него вытекает:

Второй вариант уравнения Эйлера: каждый гладкий кусок минимизирующей кривой удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\,. \tag{7.9}$$

Второй вариант условия Вейерштрасса–Эрдмана: в угловых точках минимизирующей кривой $y(x)$ функция $F - y'F'_{y'}$ имеет равные между собой односторонние пределы

$$\begin{aligned} &F(x, y(x), y'(x-0)) - y'(x-0)F'_{y'}(x, y(x), y'(x-0)) \\ &\qquad = F(x, y(x), y'(x+0)) - y'(x+0)F'_{y'}(x, y(x), y'(x+0))\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 104 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

8. Семейства экстремалей

В анализе вариационных задач на предмет достаточных условий чрезвычайно важную роль играет понятие семейств экстремалей.

8.1. Теорема включения

Считая, что F — дважды непрерывно дифференцируемая функция, рассмотрим уравнение экстремалей — уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,. \tag{8.1}$$

В развернутом виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,. \tag{8.2}$$

Определение 8.1. Экстремаль называется неособой или регулярной, если на всем ее протяжении

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0\,.$$

Тогда уравнение (8.2) приводится к виду

$$y'' = f(x, y, y')\,, \tag{8.3}$$

где f — непрерывная функция:

$$f(x, y, y') = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}\,.$$

В силу теоремы существования для решений дифференциальных уравнений в окрестности любой точки (x_0, y_0, z_0) из области непрерывности функции f существует решение уравнения (8.3). Однако общая теория дифференциальных уравнений единственность такого решения гарантирует лишь при дополнительных ограничениях на функцию f; достаточно, например, требовать непрерывной дифференцируемости функции f. Последнее можно гарантировать, считая функцию F непрерывно дифференцируемой три раза.

Если теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (8.3) имеет место, то, как известно, его общее решение образует двухпараметрическое семейство решений

$$y = y(x, \alpha, \beta)\,,$$

где α и β — постоянные интегрирования. Можно рассматривать параметры α и β как переменные начальные данные y_0 и z_0:

$$y(x_0) = y_0 = \alpha\,, \qquad y'(x_0) = z_0 = \beta\,.$$

В этом случае, согласно теореме о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных, функции $y(x, \alpha, \beta)$ и $y'_x(x, \alpha, \beta)$ будут являться непрерывно дифференцируемыми (как функции трех переменных). Заметим также, что фиксируя $\alpha = y_0$ мы получим однопараметрическое семейство экстремалей, проходящих через точку (x_0, y_0).

Усилим это простое исследование до следующей теоремы.

Теорема 8.2 (Теорема включения). *Всякая неособая экстремаль $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, в случае однозначной разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения Эйлера (8.3), содержится в двухпараметрическом семействе экстремалей*

$$y = y(x, \alpha, \beta)\,, \qquad x \in [x_1 - \delta, x_2 + \delta]\,, \quad \delta > 0\,,$$

причем функции y и y'_x являются непрерывно дифференцируемыми.

Через каждую точку (x_0, y_0) неособой экстремали проходит однопараметрическое семейство экстремалей

$$y = y(x, \beta)\,.$$

Доказательство. В обосновании нуждается лишь область определения семейства. Построение семейства экстремалей было описано лишь в окрестности каждой точки $x_0 \in [x_1, x_2]$. Объединение всех этих окрестностей покрывает интервал $[x_1, x_2]$. По лемме Гейна–Бореля, см. дополнение B, уже некоторое конечное число таких окрестностей будет покрывать интервал $[x_1, x_2]$. Фиксируем такое конечное объединение. Рассмотрим окрестность точки x_1 и следующую за ней. В пересечении этих двух соседних окрестностей локальные семейства экстремалей в силу теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений обязаны совпадать. Это позволяет продолжить локальное семейство экстремалей с первой окрестности на объединение ее со второй. Повторив этот процесс продолжения несколько раз мы за конечное число шагов достигнем второго конца экстремали $y(x)$, включая ее в описанное теоремой семейство экстремалей, см. рис. 11. □

Замечание 8.3. При доказательстве теоремы была допущена определенная вольность речи. Строго говоря, следовало бы говорить об окрестностях точек $(x_0, y(x_0), y'(x_0))$, которые покрывают кривую $\{(x, y(x), y'(x)) \mid x \in [x_1, x_2]\}$. Суть доказательства при этом не меняется. Подобные оговорки следует иметь в виду и в дальнейшем.

8.2. Канонические уравнения

В действительности специфика уравнения (8.3) позволяет доказать единственность его решения без дополнительных предположений относительно гладкости функции F. То, как это делается имеет самостоятельное значение.

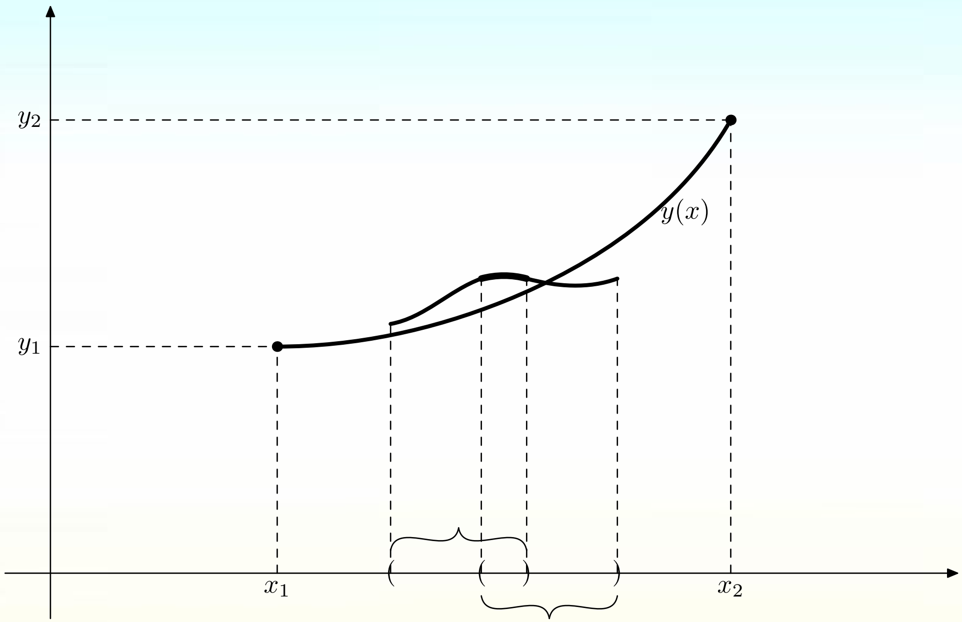


Рис. 11: Продолжение решения

Итак, мы предполагаем далее двукратную непрерывную дифференцируемость функции F и выполнение *условия регулярности*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0\,. \tag{8.4}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$p = \frac{\partial F}{\partial y'}\,, \qquad p = p(x, y, y')\,. \tag{8.5}$$

Функция p является непрерывно дифференцируемой и в силу условия (8.4)

$$\frac{\partial p}{\partial y'} \neq 0\,.$$

Отсюда и из теоремы о неявной функции заключаем, что в некоторой окрестности произвольной точки (x, y, y') (из допустимой области) существует непрерывно дифференцируемая функция

$$y' = P(x, y, p)\,. \tag{8.6}$$

Заметим далее, что вдоль экстремали $y = y(x)$ в силу уравнения Эйлера (8.1) и определения величины p

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = F'_y(x, y, y')\,.$$

Полагая

$$Q(x, y, p) = F'_y(x, y, P(x, y, p))\,,$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = P(x, y, p)\,, \\ \dfrac{dp}{dx} = Q(x, y, p)\,, \end{cases} \tag{8.7}$$

которой удовлетворяет любая неособая экстремаль. Подчеркнем, что функции P и Q являются непрерывно дифференцируемыми и, как следствие, система (8.7) удовлетворяет теореме существования и единственности решения соответствующей задачи Коши.

Подчеркнем, также, что система (8.7) эквивалентна уравнению Эйлера–Лагранжа. Действительно, если (y, p) является решением этой системы, то в силу определения функции P

$$F'_{y'}(x, y, P) = p\,.$$

Дифференцирование этого тождества по x ведет к уравнению Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{dp}{dx} = Q = \frac{\partial F}{\partial y}\,.$$

По результатам предыдущего пункта заключаем, что y-составляющая решения системы (8.7) порождает двухпараметрическое семейство экстремалей $y = y(x, \alpha, \beta)$. В качестве параметров семейства удобно выбрать начальные данные (y_0, p_0), отнесенные к некоторой точке $x_0 \in [x_1, x_2]$. Отметим следующее утверждение.

Теорема 8.4. *Определитель*

$$\begin{vmatrix} y'_\alpha & y'_\beta \\ y''_{x\alpha} & y''_{x\beta} \end{vmatrix}$$

не равен нулю на всем протяжении регулярной экстремали $y = y(x, \alpha_0, \beta_0)$.

Доказательство. Если $y(x, \alpha, \beta)\,, p(x, \alpha, \beta)$ — двухпараметрическое семейство решений системы (8.7), то

$$p'_\alpha = \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = F''_{yy'} y'_\alpha + F''_{y'y'} y''_{x\alpha}$$

и аналогично

$$p'_\beta = F''_{yy'} y'_\beta + F''_{y'y'} y''_{x\beta}\,.$$

Тогда в силу условия регулярности (8.4) достаточно доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} y'_\alpha & y'_\beta \\ p'_\alpha & p'_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ F''_{yy'} & F''_{y'y'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y'_\alpha & y'_\beta \\ y''_{x\alpha} & y''_{x\beta} \end{vmatrix}$$

не обращается в ноль. Подставим решение $y(x,\alpha,\beta)\,, p(x,\alpha,\beta)$ в систему (8.7) и продифференцируем полученные тождества по α. Получим систему

$$\begin{cases} y''_{x\alpha} = P'_y y'_\alpha + P'_p p'_\alpha\,, \\ p''_{x\alpha} = Q'_y y'_\alpha + Q'_p p'_\alpha\,, \end{cases}$$

которую при фиксированных параметрах $\alpha = \alpha_0\,, \beta = \beta_0$ можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\, y'_\alpha = A_{11}(x) y'_\alpha + A_{12}(x) p'_\alpha\,, \\ \dfrac{d}{dx}\, p'_\alpha = A_{21}(x) y'_\alpha + A_{22}(x) p'_\alpha\,, \end{cases}$$

где мы положили $A_{11} = P'_y\,, A_{12} = P'_p\,, A_{21} = Q'_y\,, A_{22} = Q'_p\,.$

Аналогичная система получается при дифференцировании по β. Таким образом, столбцы определителя

$$\begin{vmatrix} y'_\alpha & y'_\beta \\ p'_\alpha & p'_\beta \end{vmatrix} \tag{8.8}$$

являются решениями линейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}(x) y_1 + A_{12}(x) y_2\,, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}(x) y_1 + A_{22}(x) y_2\,. \end{cases}$$

Это означает, что определитель (8.8) является определителем Вронского и по теореме Лиувилля либо равен нулю тождественно, либо не обращается в ноль ни в одной точке.

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 111 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Напомним, что если (y_1, y_2) и (z_1, z_2) — два решения системы, такие, что в некоторой точке $x = t$ определитель

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & z_1(t) \\ y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix}$$

равен нулю, то столбцы в этом определителе линейно зависимы, в силу чего существуют не равные совместно нулю константы λ и μ такие, что

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Тогда в силу линейности системы функции

$$u_1 = \lambda y_1 + \mu z_1 , \qquad u_2 = \lambda y_2 + \mu z_2$$

будут составлять решение системы (u_1, u_2), тождественно равное нулю в силу единственности решения задачи Коши (тождественно равные нулю функции всегда составляют решение однородной системы), что означает линейную зависимость решений (y_1, y_2) и (z_1, z_2) при всех x.

Однако в точке x_0 этот определитель равен единице, как следует из тождеств

$$\alpha = y(x_0, \alpha, \beta) , \qquad \beta = p(x_0, \alpha, \beta) ,$$

т.к. в этом случае

$$\begin{aligned} y'_\alpha &= 1 , & y'_\beta &= 0 , \\ p'_\alpha &= 0 , & p'_\beta &= 1 . \end{aligned}$$

□

Система уравнений (8.7) может быть переписана в более симметричном виде, если использовать понятие *функции Гамильтона* или *гамильтониана* H. Она определяется следующим образом:

$$H(x, y, p) = pP - F(x, y, P) , \qquad (8.9)$$

где P — функция скорости (8.6):

$$y' = P(x, y, p) , \qquad p = F'_{y'}(x, y, y') .$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 112 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Переменные x, y, p называются *каноническими*.

Как следует из определения

$$\frac{\partial H}{\partial y} = p\,\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} = -Q$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial p} = P + p\,\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial P}{\partial p} = P\,,$$

что позволяет записать систему (8.7) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p}\,, \\[2mm] \dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y}\,. \end{cases} \tag{8.10}$$

Эта последняя называется канонической формой уравнения Эйлера–Лагранжа или уравнениями Гамильтона. Функция y, удовлетворяющая этим уравнениям в паре с некоторой функцией p, является экстремалью.

Функция F по отношению к функции H называется *функцией Лагранжа* или *лагранжианом*. Отображение

$$F(x,y,z) \mapsto H(x,y,p) = pz - F(x,y,z)\,, \tag{8.11}$$

где

$$z = P(x,y,p)\,, \qquad p = F'_z(x,y,z)\,,$$

при условии

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \neq 0\,,$$

называется *преобразованием Лежандра*. Нетрудно видеть, что преобразование Лежандра является инволюцией, т.е. повторенное дважды оно совпадает с тождественным. Действительно, применяя преобразование Лежандра к функции H, получаем

$$H(x,y,p) \mapsto G(x,y,v) = vp - H(x,y,p)\,,$$

Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

где

$$p = R(x, y, v)\,, \qquad v = H'_p(x, y, p)\,.$$

Но, как уже было показано выше,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = z + p\,\frac{\partial z}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial p} = z\,,$$

т.е. $v = z$, что и ведет к равенству $G = F$.

8.3. Инвариантный интеграл Гильберта

Для дальнейшего необходимо рассмотреть вариацию интеграла I вдоль переменной кривой Γ (т.е. изменение интеграла I при смещении кривой Γ) с уравнением

$$y = y(x, \lambda)\,,$$

концы которой описывают две заданные кривые γ_1 и γ_2, см. рис. 12. Смещение кривой y вызывается изменением параметра λ. Будем определять положение левого конца кривой Γ параметром t:

$$\gamma_1 : \qquad \begin{cases} x = x_1(t)\,, \\ y = y_1(t)\,. \end{cases}$$

Тогда параметр λ, определяющий кривую Γ, будет функцией параметра t: $\lambda = \lambda(t)$, при этом

$$y(x_1(t), \lambda(t)) \equiv y_1(t)\,.$$

Так как правый конец кривой Γ вполне определяется значением параметра t, положим

$$\gamma_2 : \qquad \begin{cases} x = x_2(t)\,, \\ y = y_2(t)\,, \end{cases}$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 114 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

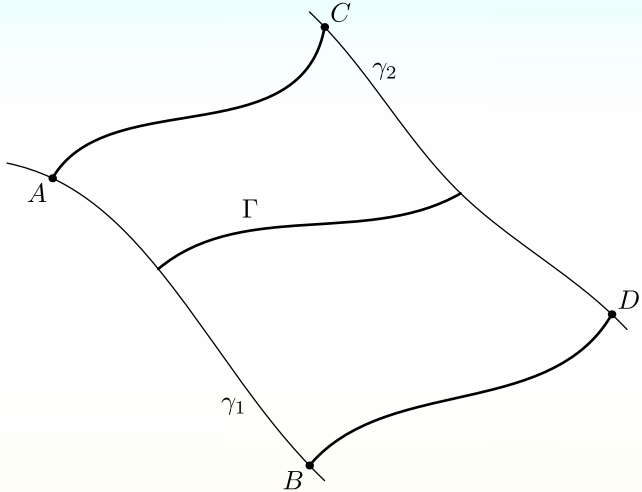


Рис. 12: Семейство экстремалей с подвижными концами

при этом

$$y(x_2(t), \lambda(t)) \equiv y_2(t)\,.$$

Функции x_1, x_2, λ будут считаться непрерывно дифференцируемыми на всем интервале изменения параметра $t \in [a, b]$. Функции $y = y(x, \lambda)$ и $y' = y'_x(x, \lambda)$ будут считаться непрерывными (в частности, кривая Γ не имеет угловых точек) и непрерывно дифференцируемыми по λ. Наконец, функция Лагранжа $F(x, y, z)$ полагается дважды непрерывно дифференцируемой.

Рассматриваемый интеграл I имеет, таким образом, вид

$$I(t) = \int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)} F(x, y(x, \lambda(t)), y'_x(x, \lambda(t)))\, dx\,,$$

или кратко

$$I(t) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx\,.$$

Найдем производную этого интеграла по параметру t. Согласно правилу (3.8) получаем

$$\frac{dI}{dt} = F(x_2, y_2, y'_x(x_2, \lambda))\,\frac{dx_2}{dt} - F(x_1, y_1, y'_x(x_1, \lambda))\,\frac{dx_1}{dt} + \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{dt}\, dx\,,$$

где

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial y'_x}{\partial \lambda}\cdot\frac{d\lambda}{dt}\,.$$

Условимся записывать это в виде

$$\frac{dI}{dt} = \left[F\,\frac{dx}{dt}\right]\Bigg|_{\gamma_1}^{\gamma_2} + \frac{d\lambda}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda\,\partial x}\right) dx\,. \tag{8.12}$$

Если какая–либо кривая Γ рассматриваемого семейства является экстремалью, т.е. удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y},$$

то для нее (в силу уравнения Эйлера)

$$\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right),$$

и, как следствие, для этой кривой в силу (8.12)

$$\frac{dI}{dt} = \left[F\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{d\lambda}{dt}\right]\Bigg|_{\gamma_1}^{\gamma_2}. \tag{8.13}$$

Остается воспользоваться равенствами

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial y}{dx}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{d\lambda}{dt}$$

и

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{\partial y}{dx}\cdot\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{d\lambda}{dt},$$

что позволит переписать (8.13) в окончательном форме

$$\frac{dI}{dt} = \left[F\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\left(\frac{dy}{dt} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right)\right]\Bigg|_{\gamma_1}^{\gamma_2}, \tag{8.14}$$

или в раскрытом виде

$$I'(t) = F(x_2, y_2, y'_x(x_2,\lambda))\cdot x'_2 + F'_{y'}(x_2, y_2, y'_x(x_2,\lambda))\cdot[y'_2 - y'_x(x_2,\lambda)\cdot x'_2]$$
$$- F(x_1, y_1, y'_x(x_1,\lambda))\cdot x'_1 - F'_{y'}(x_1, y_1, y'_x(x_1,\lambda))\cdot[y'_1 - y'_x(x_1,\lambda)\cdot x'_1].$$

Определим криволинейный интеграл

$$U = \int_\gamma F(x, y, z(x, y))dx + F'_z(x, y, z(x, y)) \cdot [dy - z(x, y)dx]\,, \tag{8.15}$$

взятый вдоль некоторой кривой γ. Подчеркнем, что этот интеграл зависит не только от пути интегрирования γ, но также от функции $z(x, y)$:

$$U = U\{\gamma; z\}\,,$$

Он называется *интегралом Гильберта*, а функция z — его *функцией наклона*. Если кривая γ задана параметрически

$$\gamma : \qquad \begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \end{cases}$$

где $t \in [a, b]$, то

$$U = \int\limits_a^b \left[F(x, y, z(x, y)) \cdot x' + F'_z(x, y, z(x, y)) \cdot [y' - z(x, y) \cdot x']\right] dt\,.$$

Предположим теперь, что переменная кривая Γ при всех значениях параметра $t \in [a, b]$ является экстремалью. Обозначим через Γ_{AC} и Γ_{BD} экстремали семейства, соответствующие значениям параметра $t = a$ и $t = b$. Также обозначим через γ_{AB} участок кривой γ_1, соединяющий точки A (соответствующей значению параметра $t = a$) и B (соответствующей значению параметра $t = b$) и аналогично обозначим через γ_{CD} участок кривой γ_2 от точки C (соответствующей значению параметра $t = a$) до точки D (соответствующей значению параметра $t = b$), см. рис. 12. Если проинтегрировать равенство (8.14) по переменной t в пределах от a до b, мы придем к замечательному равенству

$$I\{\Gamma_{BD}\} - I\{\Gamma_{AC}\} = U\{\gamma_{CD}; z\} - U\{\gamma_{AB}; z\}\,, \tag{8.16}$$

где мы для наглядности положили $I(b) = I\{\Gamma_{BD}\}$ и $I(a) = I\{\Gamma_{AC}\}$. Функция наклона $z = z(x, y)$ определяется исключением параметра λ из равенств

$$\begin{cases} z = y'_x(x, \lambda)\,, \\ y = y(x, \lambda)\,, \end{cases}$$

и называется *функцией наклона* семейства экстремалей.

В дальнейшем всегда, если не оговорено противное, интеграл Гильберта будет рассматриваться с функцией наклона равной функции наклона некоторого семейства экстремалей. Если из контекста будет ясно, о какой функции наклона идет речь, в обозначении интеграла Гильберта она будет опускаться:

$$U\{\gamma\} = U\{\gamma; z\}\,.$$

Подведем итог в следующей теореме.

Теорема 8.5. *Если концы переменной экстремали описывают две кривые γ_1 и γ_2, то разность значений интеграла I, взятого вдоль конечного Γ_2 и начального Γ_1 положений экстремали равна разности значений интеграла Гильберта, соответствующего конечной γ_2 и начальной γ_1 концевой кривой и функцией наклона z равной функции наклона семейства экстремалей $z = y'_x$:*

$$I\{\Gamma_2\} - I\{\Gamma_1\} = U\{\gamma_2\} - U\{\gamma_1\}\,.$$

Заметим, что теорема остается верной, если какая–либо из концевых кривых $\gamma_{1,2}$(или обе сразу) вырождается в точку (экстремали с закрепленными концами).

Интеграл Гильберта $U\{\gamma\}$ называется инвариантным в следствие следующего своего свойства. Если деформировать контур интегрирования γ удерживая концы интегрирования, интеграл U не изменяется. Это сразу вытекает из формулы (8.16), если в ней положить $\gamma = \gamma_2$, а контур γ_1 стянуть в точку, так что $U\{\gamma_1\} = 0$. Действительно, в этом случае

$$U\{\gamma\} = I\{\Gamma_2\} - I\{\Gamma_1\}$$

и правая часть равенства не зависит от формы кривой γ.

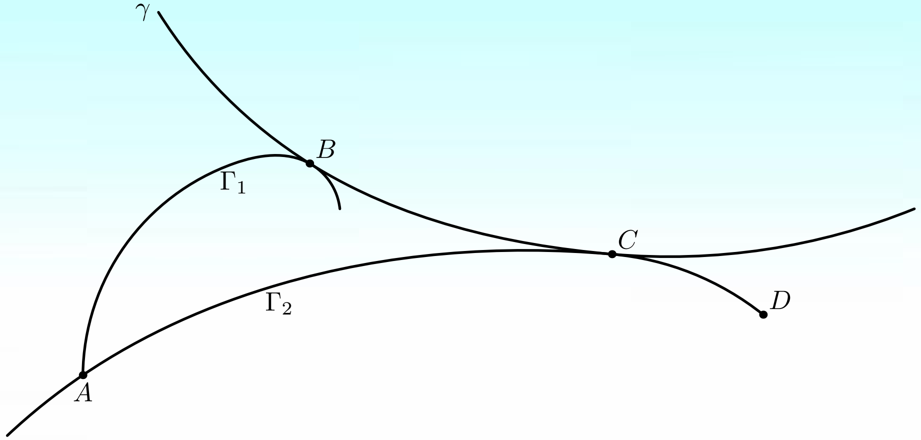


Рис. 13: Огибающая экстремалей

8.4. Теорема об огибающей и необходимое условие Якоби

Этот пункт является прямым продолжением предыдущего, что означает, что мы остаемся в рамках описанных выше предположений, сосредоточив свое внимание на важных следствиях.

Теорема 8.6 (Об огибающей). *Если однопараметрическое семейство экстремалей Γ с начальной точкой A имеет огибающую γ, см. рис. 13, то*

$$I\{\Gamma_{AC}\} = I\{\Gamma_{AB}\} + I\{\gamma_{BC}\}$$

при любом положении точки B, если она предшествует точке C на кривой γ (говорят, что точка B предшествует точке C, если угол BCA равен нулю).

Здесь Γ_{AB} *часть экстремали* Γ_1 *между точек* A *и* B*,* Γ_{AC} *часть экстремали* Γ_2 *между точек* A *и* C*,* γ_{BC} *часть огибающей* γ *между точек* B *и* C*.*

Доказательство. Рассмотрим семейство экстремалей, проходящих через точку A. Согласно теореме (8.5)

$$I\{\Gamma_{AC}\} - I\{\Gamma_{AB}\} = U\{\gamma_{BC}\} - U\{\gamma_{AA}\}\,,$$

где $z = y'_x$. Но интеграл Гильберта $U\{\gamma_{AA}\}$ равен нулю в силу вырождения контура интегрирования в точку. А условия касания экстремалей $y = y(x, \lambda)$ и огибающей

$$\gamma : \qquad \begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \end{cases}$$

где $t \in [a, b]$, приводят к равенству производной

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

вдоль огибающей и функции направления $z = y'_x(x, \lambda(t))$, что влечет за собой равенство интегралов

$$U\{\gamma_{BC}\} = \int\limits_a^b [F(x, y, y'_x) \cdot x' + F'_z(x, y, y'_x) \cdot [y' - y'_x \cdot x']]\, dt$$

$$= \int\limits_a^b F(x, y, y'_x) \cdot x'\, dt = \int\limits_{\gamma_{BC}} F(x, y, y'_x)\, dx = I\{\gamma_{BC}\}\,.$$

□

Аналогичное утверждение можно сформулировать для экстремалей со свободным концом. Напомним, что экстремаль пересекает кривую γ_1, заданную уравнениями

$$\gamma_1 : \qquad \begin{cases} x = x_1(t)\,, \\ y = y_1(t)\,, \end{cases}$$

трансверсально, если

$$F(x_1, y_1, y'_x(x_1)) \cdot x'_1 + F'_z(x_1, y_1, y'_x(x_1)) \cdot [y'_1 - y'_x(x_1) \cdot x'_1] = 0\,.$$

Это в точности означает, что если семейство экстремалей $y(x, \lambda)$ пересекает кривую γ_1 трансверсально, то интеграл Гильберта вдоль γ_1 с функцией наклона $z = y'_x$ равен нулю. И тогда как и выше мы получаем

Теорема 8.7 (Об огибающей и трансверсальной). *Если однопараметрическое семейство экстремалей трансверсально пересекает кривую γ_1 и имеет огибающую γ, см. рис. 14, то*

$$I\{\Gamma_{CD}\} = I\{\Gamma_{AB}\} + I\{\gamma_{BD}\}$$

при любом положении точки B, если она предшествует точке D на кривой γ. Здесь Γ_{AB} часть экстремали Γ_1 между точек A и B, Γ_{CD} часть экстремали Γ_2 между точек C и D, γ_{BD} часть огибающей γ между точек B и D.

Определение 8.8. *Центральным* называется семейство экстремалей с общей *начальной* точкой. Точка касания экстремали и огибающей данного центрального семейства называется точкой, *сопряженной* с начальной точкой экстремали.

Определение 8.9 (Условие Якоби). Говорят, что неособая экстремаль удовлетворяет условию Якоби, если между началом и концом этой экстремали нет точек, сопряженных с начальной.

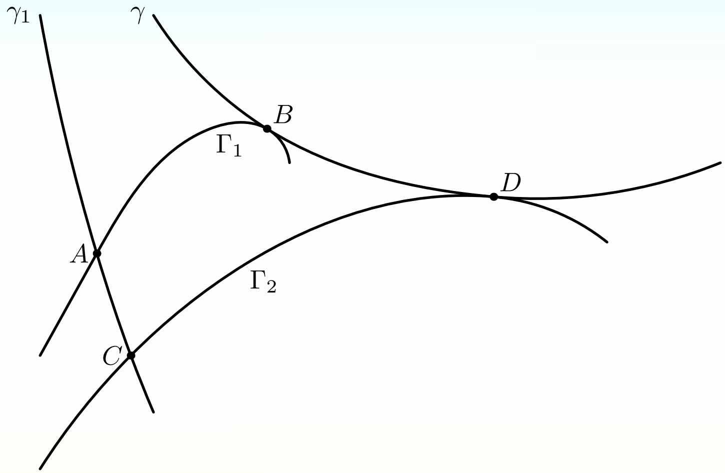


Рис. 14: Огибающая экстремалей, трансверсальных к кривой γ_1

Теорема 8.10 (Необходимое условие Якоби). *Если неособая кривая без угловых точек сообщает минимум функционалу I, она является экстремалью, удовлетворяющей условию Якоби.*

Доказательство. Неособая гладкая кривая $y(x)$, дающая минимум функционалу I, является экстремалью, однозначно определенной любыми своими начальными данными $(x_0, y(x_0), y'(x_0))$. Пусть эта экстремаль Γ_{AD} имеет сопряженную точку C с начальной точкой A, см. рис. 13. Из теоремы об огибающей вытекает, что составная кривая $\Gamma_{AB} \cup \gamma_{BC} \cup \Gamma_{CD}$ (при любом выборе точки B, предшествующей точке C) также сообщает интегралу I минимум и является, тем самым, еще одной экстремалью, проходящей через точку C, с тем же наклоном, что и экстремаль Γ_{AD}, что противоречит единственности (с начальной точкой C). □

Далее мы опишем условие Якоби с аналитических позиций.

8.5. Вторая вариация интегрального функционала

Вернемся к анализу интегрального функционала I,

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx\,. \tag{8.17}$$

Функцию $F(x, y, z)$ будем считать дважды непрерывно дифференцируемой.

Что еще можно сказать о непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ (с закрепленными концами), на которой функционал I достигает наименьшего значения?

Как и ранее, фиксируем вариацию функции y, в данном случае — непрерывно дифференцируемую функцию η, обращающуюся в ноль на концах интервала $[x_1, x_2]$, и составим интеграл

$$I(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + t\eta, y' + t\eta')\, dx\,.$$

Функция $I(t)$ при $t=0$ достигает минимума. Как следствие, помимо

$$\delta I[\eta] = I'(0) = 0\,,$$

имеем

$$\delta^2 I[\eta] = I''(0) \geqslant 0\,,$$

т.е. вторая вариация функционала I должна быть неотрицательной.

Нетрудно вычислить эту производную.

$$I'(t) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' \right) dx\,,$$

откуда

$$I''(t) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \eta'^2 \right) dx\,.$$

В выписанных выражениях производные функции F нужно рассматривать как функции переменных $(x, y+t\eta, y'+t\eta')$. Полагая $t=0$ мы приходим к формуле для второй вариации

$$I''(0) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \eta'^2 \right) dx\,, \tag{8.18}$$

где производные функции F зависят от аргумента (x, y, y').

Предположим теперь, что функция F — трижды непрерывно дифференцируема и проинтегрируем по частям во втором слагаемом

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \eta\eta'\, dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\, d\eta^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \eta^2 \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \cdot \eta^2\, dx\,.$$

Внеинтегральные слагаемые здесь обращаются в ноль в силу нулевых граничных условий для функции η, откуда находим

$$I''(0) = \int\limits_{x_1}^{x_2} [A\eta^2 + B\eta'^2]\, dx\,, \tag{8.19}$$

где

$$A = A(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right),$$
$$B = B(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,.$$

Интересно заметить, что проверка необходимого условия минимальности интеграла I в отношении второй вариации (т.е. условия $I''(0) \geqslant 0$) свелась к задаче на наименьшее значение интегрального квадратичного функционала (8.19) в отношении выбора функции η.

Уравнение Эйлера–Лагранжа для этой присоединенной задачи называется *уравнением Якоби* для исходной задачи. Оно имеет вид

$$A\eta - \frac{d}{dx}(B\eta') = 0\,, \tag{8.20}$$

где искомая функция η удовлетворяет граничным условиям

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0\,.$$

Уравнение Якоби можно охарактеризовать еще с одних позиций. Если семейство функций $y(x, \lambda)$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, например,

$$f(x, y, y', y'') = 0\,, \tag{8.21}$$

то производная по параметру $\eta = y'_\lambda$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' + \frac{\partial f}{\partial y''}\eta'' = 0\,, \tag{8.22}$$

которое получается просто дифференцированием равенства (8.21) по параметру λ и называется *уравнением в вариациях* по отношению к исходному уравнению (8.21). Смысл уравнения в вариациях определяется следующим. В соответствии с равенством

$$y(x,\lambda) = y(x,0) + y'_\lambda(x,0)\lambda + o(\lambda)\,, \qquad \lambda \to 0\,,$$

и линейностью уравнения (8.22), если η достаточно мало, то функция $y+\eta$ в старшем порядке также будет удовлетворять дифференциальному уравнению (8.21).

Можно заметить, что уравнение Якоби является уравнением в вариациях по отношению к уравнению Эйлера–Лагранжа. Для облегчения проверки этого утверждения воспользуемся стандартным соглашением обозначать частные производные функции только соответствующими индексами. В этом случае уравнение Эйлера (в раскрытом виде) примет вид

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0\,, \tag{8.23}$$

а коэффициенты в уравнение Якоби (также в раскрытом виде) запишутся как

$$\begin{aligned}
A &= F_{yy} - F_{xyy'} - F_{yyy'}y' - F_{yy'y'}y''\,,\\
B &= F_{y'y'}\,,\\
\frac{dB}{dx} &= F_{xy'y'} + F_{yy'y'}y' + F_{y'y'y'}y''\,.
\end{aligned}$$

Составляя уравнение в вариациях (8.22) для уравнения (8.23), получим

$$\begin{aligned}
&[F_{yy} - F_{xyy'} - F_{yyy'}y' - F_{yy'y'}y'']\eta\\
&\qquad + [\underline{F_{yy'}} - F_{xy'y'} - F_{yy'y'}y' - \underline{F_{yy'}} - F_{y'y'y'}y'']\eta'\\
&\qquad\qquad + [-F_{y'y'}]\eta'' = 0\,,
\end{aligned}$$

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 127 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

что в точности и является, как видим, уравнением Якоби

$$A\eta - \frac{dB}{dx} \cdot \eta' - B\eta'' = 0\,.$$

8.6. Аналитический вариант условия Якоби

Рассмотрим уравнение Якоби

$$A\eta - \frac{d}{dx}(B\eta') = 0\,, \tag{8.24}$$

где функция η удовлетворяет нулевым граничным условиям

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0\,.$$

Подчеркнем, что коэффициенты определяются равенствами

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right),$$
$$B = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,,$$

на экстремали $y(x)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера с функцией Лагранжа $F(x, y, y')$. В этом смысле уравнение Якоби называют иногда *присоединенным* уравнением к уравнению Эйлера–Лагранжа.

Определение 8.11. Точка (x_0, y_0), на экстремали $y(x)$ (т.е. $y_0 = y(x_0)$) называется сопряженной с точкой (x_1, y_1) (началом экстремали), если уравнение Якоби имеет решение η, обращающееся в ноль в точке x_0, но не равное нулю тождественно на интервале $[x_1, x_0]$.

Теорема 8.12. *Необходимое условие Якоби 8.10 выполнено при новом его понимании и новом определении сопряженной точки.*

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 128 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Доказательство. Пусть функция $y(x)$ доставляет наименьшее значение интегралу I в условиях регулярности. Вторая вариация $\delta^2 I[\eta]$ как функционал относительно функции η имеет тогда наименьшее значение равное нулю, которое достигается при $\eta = 0$ тождественно.

Пусть (x_0, y_0) — сопряженная точка к точке (x_1, y_1) и $\eta(x)$ — соответствующее решение уравнения Якоби. Обозначим функцию Лагранжа для второй вариации (8.19) через L:

$$L(x, \eta, \eta') = A(x)\eta^2 + B(x)\eta'^2 .$$

Заметим, что

$$2L = \frac{\partial L}{\partial \eta} \cdot \eta + \frac{\partial L}{\partial \eta'} \cdot \eta' .$$

Уравнение Эйлера для функционала $\delta^2 I[\eta]$ или, что то же, уравнение Якоби для функционала $I[y]$, имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta'}\right),$$

тогда

$$2L = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta'}\right) \cdot \eta + \frac{\partial L}{\partial \eta'} \cdot \frac{d\eta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta'} \cdot \eta\right).$$

Составим функцию

$$\xi(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{при} \quad x \in [x_1, x_0]\,, \\ 0 & \text{при} \quad x \in [x_0, x_2]\,. \end{cases}$$

Функция ξ является непрерывной, кусочно непрерывно дифференцируемой, имеющей угловую точку при $x = x_0$. Заметим, что

$$\delta^2 I[\xi] = \int\limits_{x_1}^{x_2} [A\xi^2 + B\xi'^2]\, dx = \int\limits_{x_1}^{x_0} [A\eta^2 + B\eta'^2]\, dx = \int\limits_{x_1}^{x_0} L(x, \eta, \eta')\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta'} \cdot \eta\right)\Bigg|_{x=x_1}^{x=x_0} = 0 .$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 129 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Это означает, что функция ξ также доставляет наименьшее значение функционалу $\delta^2 I$ и должна в угловой точке удовлетворять условию Вейерштрасса–Эрдмана (7.2):

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \xi'}\right|_{x=x_0-0} = \left.\frac{\partial L}{\partial \xi'}\right|_{x=x_0+0},$$

что ведет к равенству

$$B(x_0)\eta'(x_0) = B(x_0)\xi'(x_0-0) = B(x_0)\xi'(x_0+0) = 0\,.$$

В силу регулярности экстремали $y(x)$

$$B = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0\,,$$

откуда

$$\eta'(x_0) = 0\,.$$

Но последнее означает, что η является решение линейного однородного уравнения второго порядка с нулевыми начальными условиями

$$\eta(x_0) = 0\,, \quad \eta'(x_0) = 0\,,$$

и, следовательно, равно нулю тождественно, в противоречии с аналитическим определением сопряженной точки. Следовательно предположение о существовании сопряженной точки не допустимо. □

Мы покажем далее, что геометрическое 8.8 определение сопряженной точки поглощается вторым аналитическим 8.11 определением, а при некотором дополнительном условии верно и обратное включение. Вместе с тем эти определения сопряженных точек и соответствующие варианты условия Якоби не вполне тождественны. Второе определение не предполагает, например, даже существования огибающей. В то же время первый вариант условия Якоби может быть расширен на случай совпадения сопряженной точки со вторым концом экстремали, в то время как для второго

варианта внутреннее положение сопряженной точки совершенно необходимо. В этом смысле они дополняют друг друга.

Итак, покажем, что сопряженная точка в смысле геометрического определения является также сопряженной в смысле аналитического определения. Пусть $y = y(x, \lambda)$ — семейство экстремалей, проходящих через точку (x_1, y_1) и имеющих огибающую. Пусть огибающая касается кривой семейства $y(x, \lambda)$ в точке $x(\lambda)$. Тогда уравнение огибающей запишется в виде

$$x = x(\lambda)\,, \quad y = y(x(\lambda), \lambda)\,.$$

В силу закрепленной начальной точки экстремалей имеем

$$y'_\lambda(x_1, \lambda) = 0\,.$$

Кроме того, в силу условия касания экстремалей и огибающей тангенсы угла наклона касательной к экстремали

$$y'_x$$

и огибающей

$$\frac{\frac{dy}{d\lambda}}{\frac{dx}{d\lambda}} = \frac{y'_x \cdot x'_\lambda + y'_\lambda}{x'_\lambda}\,,$$

отнесенных к одной и той же точке $x(\lambda)$ равны между собой. Как следствие

$$y'_\lambda(x(\lambda), \lambda) = 0\,.$$

Так как уравнение Якоби является уравнением в вариациях, см. (8.22), функция

$$y'_\lambda(x, \lambda)$$

при фиксированном λ является решением уравнения Якоби. Эта функция обращается в ноль не только в точке x_1, но и в точке $x(\lambda)$. Если теперь функция y'_λ не обращается тождественно в ноль на интервале $[x_1, x(\lambda)]$, то точка с абсциссой $x(\lambda)$,

являющаяся сопряженной к точке (x_1, y_1) в смысле геометрического определения, будет таковой и в смысле аналитического определения.

Докажем обратное, предполагая что каждая кривая семейства экстремалей $y = y(x,\lambda)$, начинающихся в точке (x_1, y_1), имеет сопряженную точку $(x(\lambda), y(x(\lambda),\lambda))$ в смысле аналитического определения. Пусть $\eta(x,\lambda)$ — решение уравнение Якоби с нулевыми граничными условиями и обращающееся в ноль в точке $x(\lambda)$. Заметим, что функция $y'_\lambda(x,\lambda)$ также является решением уравнения Якоби с нулевыми граничными условиями. Как следствие, определитель Вронского функций y'_λ и η равен нулю в точке x_1, а значит в условиях регулярности (т.е. при $B \neq 0$) равен нулю тождественно. Это означает, что (вариант теоремы Штурма)

$$y'_\lambda(x(\lambda),\lambda) = 0\,. \tag{8.25}$$

Напомним для полноты изложения доказательство этого утверждения. Положим $\eta(x,\lambda) = \eta(x)$ и $y'_\lambda(x,\lambda) = \xi(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} A\xi - (B\xi')' &= 0 \quad | \times \eta\,, \\ A\eta - (B\eta')' &= 0 \quad | \times \xi\,. \end{aligned}$$

Вычитая (после умножения) из первого равенства второе, находим

$$\xi(B'\eta' + B\eta'') - \eta(B'\xi' + B\xi'') = 0\,. \tag{8.26}$$

Введем определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix} = \xi\eta' - \xi'\eta\,.$$

При этом

$$W' = \underline{\xi'\eta'} + \xi\eta'' - \xi''\eta - \underline{\xi'\eta'} = \xi\eta'' - \xi''\eta\,,$$

так что уравнение (8.26) примет вид

$$B'W + BW' = 0\,,$$

т.е.

$$(BW)' = 0\,.$$

Проинтегрируем полученное равенство в пределах от x_1 до $t = x(\lambda)$. Тогда

$$(BW)|_{x_1}^{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad B(t)W(t) = B(x_1)W(x_1)\,,$$

или подробнее

$$B(t)[\xi(t)\eta'(t)-\xi'(t)\eta(t)] = B(x_1)[\xi(x_1)\eta'(x_1)-\xi'(x_1)\eta(x_1)]\,.$$

В силу граничных условий $\xi(x_1)=\eta(x_1)=\eta(t)=0$, откуда

$$B(t)\eta'(t)\xi(t)=0\,.$$

Остается заметить, что, во-первых, по условию регулярности $B(t)\neq 0$ и, во-вторых, $\eta'(t)\neq 0$ (иначе функция η была бы тождественным нулем). Таким образом остается $\xi(t)=0$, что и утверждалось.

Итак, равенство (8.25) установлено. Предположим, что

$$y''_{x\lambda}(x(\lambda),\lambda)\neq 0\,,$$

что является типичным, см. теорему 8.4. Тогда в силу теоремы о неявной функции уравнение

$$y'_\lambda(x,\lambda)=0$$

разрешимо относительно x (что уже известно) и решение $x(\lambda)$ является непрерывно дифференцируемой функцией от λ (что важно). Рассмотрим гладкую кривую, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = x(\lambda)\,, \\ y = y(x(\lambda),\lambda)\,. \end{cases}$$

Коэффициент наклона касательной к этой кривой в силу (8.25) равен

$$\frac{\frac{dy}{d\lambda}}{\frac{dx}{dl}} = \frac{y'_x\cdot x'_\lambda + y'_\lambda}{x'_\lambda} = y'_x\,,$$

т.е. совпадает с коэффициентом наклона касательной к экстремали семейства в той же точке, и значит построенная кривая является огибающей семейства экстремалей.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 8.13. *Соответствие $x^*=\varphi(x)$, где x^* — точка, сопряженная с точкой x, $x^*>x$, является монотонно возрастающей и непрерывной функцией.*

Веб – страница
Титульный лист
Страница 133 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Доказательство. Пусть η_1 и η_2 — фундаментальная система решений уравнения Якоби (8.24). Монотонность функции φ является следствием теоремы Штурма. Действительно, если $x_1 < x_1^*$ — соседние корни решения η_1, а $x_2 < x_2^*$ — соседние корни решения η_2, то неравенство $x_1 < x_2 < x_1^*$ влечет за собой неравенство $x_1^* < x_2^*$, так как согласно теореме Штурма между двумя соседними корнями одного решения находится лишь один единственный корень любого другого решения, линейно независимого с данным. Это означает, что функция φ является монотонной в окрестности каждой точки и, следовательно, монотонной всюду.

Заметим, далее, что линейная комбинация

$$\eta(x) = \eta_2(x_0)\eta_1(x) - \eta_1(x_0)\eta_2(x) \equiv w(x, x_0)\,,$$

является решением уравнения Якоби, обращающемся в ноль в точке x_0. Сопряженная точка с точкой x_0 будет определяться равенством

$$\eta(x_0^*) = 0\,.$$

Заметим, что в силу простоты корней,

$$\eta'(x_0^*) \neq 0\,.$$

Иначе говоря, сопряженные точки x^* удовлетворяют уравнению

$$w(x^*, x) = 0\,,$$

причем

$$\frac{\partial w}{\partial x^*} \neq 0\,.$$

По теореме о неявной функции в окрестности каждой точки (x, x^*) существует функция

$$x^* = \varphi(x)\,.$$

В силу непрерывной дифференцируемости функции w функция φ также является непрерывно дифференцируемой (в частности — непрерывной). □

Следствие 8.14. *Если экстремаль $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ не имеет точки, сопряженной с точкой x_1, то на продолжении экстремали влево от точки x_1 существует точка x_0 такая, что продолженная экстремаль $y = y(x)$, $x \in [x_0, x_2]$ также не имеет точки, сопряженной с начальной точкой x_0.*

Доказательство. Функция $\varphi(x)$, определяющая сопряженные точки точкам x, на интервале $[x_1, x_2]$ принимает значения строго большие x_2 (в силу отсутствия сопряженных точек на интервале $[x_1, x_2]$):

$$x \in [x_1, x_2] \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) > x_2\,.$$

Следовательно, в силу непрерывности она строго больше x_2 и на некотором расширенном интервале $[x_0, x_2]$, $x_0 < x_1$. □

8.7. Необходимые условия Вейерштрасса и Лежандра

Вернемся к понятию инвариантного интеграла Гильберта. Напомним, что интеграл Гильберта

$$U\{\gamma; z\} = \int_\gamma F(x, y, z(x,y))dx + F'_z(x, y, z(x,y)) \cdot [dy - z(x,y)dx]\,, \qquad (8.27)$$

не зависит от формы кривой γ (но не от ее концов). Напомним, что функция наклона z предполагается равной функции наклона y'_x семейства экстремалей, см. стр. 119.

Пусть γ — экстремаль $y = y(x)$, доставляющая минимум функционалу $I[y]$ с функцией Лагранжа $F(x, y, z)$ для задачи с закрепленными концами в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и вложенная в семейство экстремалей $y = y(x, \lambda)$. Для любой гладкой кривой Γ, концы которой совпадают с концами экстремали γ, выполнено равенство

$$U\{\Gamma\} = U\{\gamma\}\,.$$

Однако на экстремалях интегралы U и I, очевидно, совпадают:

$$U\{\gamma\} = I[y]\,.$$

Если кривая Γ описывается равенством

$$y = Y(x)\,,$$

то находим

$$\Delta I[y] = I[Y] - I[y] = I[Y] - U\{\gamma\} = I[Y] - U\{\Gamma\}\,,$$

или иначе

$$\Delta I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} [F(x,Y,Y') - F(x,Y,z) - F'_z(x,Y,z)\cdot(Y'-z)]\,dx\,. \tag{8.28}$$

Подчеркнем, что в этой формуле $z = z(x, Y(x))$ равно коэффициенту наклона y'_x кривой семейства экстремалей, взятому в точке сравнимой кривой Y. Если ввести *функцию Вейерштрасса*

$$\mathcal{E}(x,y,u,v) = F(x,y,v) - F(x,y,u) - F'_u(x,y,u)\cdot(v-u)\,, \tag{8.29}$$

последний интеграл перепишется в виде

$$\Delta I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathcal{E}(x,Y,z,Y')\,dx\,. \tag{8.30}$$

Именно на этом представлении будет основываться вывод достаточных условий экстремума. Однако предварительно установим последние два из необходимых условий.

Нетрудно получить следующее необходимое условие

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 136 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Теорема 8.15 (Необходимое условие Вейерштрасса). *Если функция* $y = y(x)$ *доставляет минимум функционалу* I *в классе непрерывных, кусочно непрерывно дифференцируемых функций, то*

$$\mathcal{E}(x, y(x), y'(x), Y'(x)) \geqslant 0$$

для каждой неугловой точки $(x, y(x))$ *при любом значении* $Y'(x)$.

Доказательство. Фиксируем неугловую точку $(x_0, y(x_0))$ минимизирующей экстремали. Предположим, что

$$\mathcal{E}(x_0, y(x_0), y'(x_0), Y'(x_0)) < 0\,.$$

Тогда в силу непрерывности функции Вейерштрасса она будет отрицательной и во всех достаточно близких точках к точке $(x_0, y(x_0), y'(x_0), Y'(x_0))$. Выпустим из точки $A = (x_0, y(x_0))$ прямую с наклоном $Y'(x_0)$:

$$y = y(x_0) + Y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

и фиксируем на этой прямой точку $B = (b, v)$ такую, чтобы на всем отрезке от A до B функция Вейерштрасса была отрицательна.

Выберем правее точки A точку C на минимизирующей кривой так, чтобы дуга γ_{AC} не содержала угловых точек и чтобы точка C не являлась сопряженной с точкой A. Согласно теореме 8.2 о включении экстремали в семейство экстремалей, а также согласно выбору точки C существует семейство экстремалей $y(x, \lambda)$, соединяющих точку C с точками отрезка AB, см. рис. 15. Тогда в соответствии с теоремой (8.5) и в силу $U\{CC\} = 0$,

$$I\{\gamma_{BC}\} - I\{\gamma_{AC}\} = -U\{AB\}\,,$$

где γ_{BC} и γ_{AC} — конечная и начальная экстремали семейства. Прибавляя к каждой части полученного равенства интеграл $I\{AB\}$, получим

$$I\{AB \cup \gamma_{BC}\} - I\{\gamma_{AC}\} = \int\limits_{x_0}^{b} \mathcal{E}(x_0, y(x_0 + Y'(x_0)(x - x_0)), y'_x, Y'(x_0))\, dx\,,$$

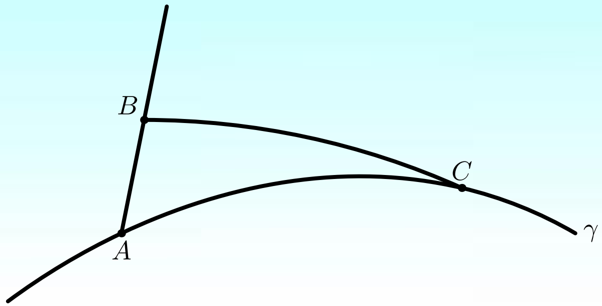


Рис. 15: К доказательству условия Вейерштрасса

где b — абсцисса точки B и под $AB \cup \gamma_{BC}$ понимается составная кривая. Полученное равенство привело к противоречию, поскольку справа стоит величина, по построению, отрицательная, в то время как слева не отрицательная (в силу того, что дуга γ_{AC} является частью кривой, доставляющей минимум). $\square$

Полезно переписать полученное в доказательстве теоремы соотношение для приращения интеграла $I = I(b)$ в терминах бесконечно малых, устремляя точку B к точке A в заданном направлении. В этом случае в точке A

$$dI = \mathcal{E}(x_0, y(x_0), y'(x_0), Y'(x_0))\, dx\,,$$

причем можно показать, что это равенство будет выполняться вне зависимости от того, является ли допредельная кривая γ_{BC} экстремалью или нет. Оно определяет бесконечно малое изменение интеграла I в точке A в направлении с коэффициентом наклона $Y'(x_0)$. Данное дифференциальное соотношение непосредственно ведет к утверждению теоремы, поскольку величина I при варьировании минимизирующей экстремали не может убывать.

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 138 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Следствие 8.16 (Необходимое условие Лежандра). *Если регулярная экстремаль $y = y(x)$ доставляет минимум функционалу I, то на всем ее протяжении*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0\,.$$

Доказательство. Напишем формулу Тейлора для функции Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(x, y(x), y'(x), Y'(x))$$

в точке $(x, y(x), y'(x), y'(x))$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, y(x), y'(x), Y'(x)) &= \mathcal{E}(x, y(x), y'(x), y'(x)) \\ &\quad + \mathcal{E}'_{Y'}(x, y(x), y'(x), y'(x)) \cdot (Y' - y') \\ &\qquad + \mathcal{E}''_{Y'Y'}(x, y(x), y'(x), y'(x)) \cdot (Y' - y')^2 + o((Y' - y')^2)\,.\end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, y(x), y'(x), y'(x)) &= 0\,, \\ \mathcal{E}'_{Y'}(x, y(x), y'(x), y'(x)) &= F'_{y'}(x, y(x), y'(x)) - F'_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0\,, \\ \mathcal{E}''_{Y'Y'}(x, y(x), y'(x), y'(x)) &= F''_{y'y'}(x, y(x), y'(x))\,,\end{aligned}$$

откуда вытекает неотрицательность $F''_{y'y'}(x, y(x), y'(x))$. Однако равенство нулю исключается ввиду условия регулярности. □

Замечание 8.17. Отметим, что если обобщение условия регулярности на случай нескольких искомых функций выглядит, как невырожденность матрицы

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_j}\right) \neq 0\,,$$

то условие Лежандра формулируется как условие положительной определенности этой матрицы:

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_j'} \xi_i \xi_j > 0 \qquad (\forall \xi_1, \ldots, \xi_j : \quad \sum \xi_i^2 = 1)\,.$$

На этот раз мы собрали достаточное количество необходимых условий.

8.8. Понятие поля экстремалей

Вывод достаточных условий основывается на формуле (8.30). Однако для того, чтобы воспользоваться этой формулой, мы должны с самого начала располагать какой-либо функцией наклона семейства экстремалей, причем определенной в некоторой окрестности исследуемой экстремали. Построением такой функции наклона мы и займемся.

Будем говорить, что это семейство экстремалей $y = y(x, \lambda)$ однократно покрывает область $\mathcal{D}$ плоскости xy для значений $x \in (a, b)$ и $\lambda \in (\alpha, \beta)$, если через каждую точку области $\mathcal{D}$ проходит одна и только одна экстремаль семейства. Это означает, что параметр λ может быть описан как функция точки (x, y): экстремаль $y(x, \lambda)$, проходящая через точку (x, y) определяет значение этой функции $\lambda = \lambda(x, y)$. Функция

$$z(x, y) = y_x'(x, \lambda(x, y))$$

называется *функцией наклона* семейства $y(x, \lambda)$. Заметим, что экстремали семейства можно описать как решения дифференциального уравнения

$$y' = z(x, y)\,.$$

Описанные семейства экстремалей на плоскости называют полями экстремалей. Итак,

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 140 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Определение 8.18. Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченная связная область на плоскости xy. Говорят, что непрерывно дифференцируемая функция $z(x,y)$ определяет *поле направлений* $(1, z(x,y))$ в области $\mathcal{D}$ для функционала $I[y]$, если каждое решение дифференциального уравнения

$$y' = z(x,y)$$

является экстремалью функционала $I[y]$. Так полученное семейство экстремалей называется *полем экстремалей*.

Отметим, что в согласии с теоремой существования и единственности решений дифференциальных уравнений, поле экстремалей действительно однократно покрывает область определения $\mathcal{D}$.

Определение 8.19. Говорят, что экстремаль $y = y(x)$ вложена в поле экстремалей, если область определения соответствующего поля направлений является окрестностью графика данной экстремали и функция $y(x)$ является решением дифференциального уравнения этого поля.

Теорема 8.20. *Если однопараметрическое семейство экстремалей $y = Y(x,\lambda)$, дважды непрерывно дифференцируемое по x и λ (в действительности достаточно непрерывности функций Y''_{xx} и $Y''_{x\lambda}$) в области $\mathcal{D}$ для значений $x \in (a,b)$ и $\lambda \in (\alpha,\beta)$, содержит экстремаль $y = Y(x,\lambda_0) \equiv y_0(x)$ такую, что $Y'_\lambda(x,\lambda_0) \neq 0$ при всех $x \in [x_1,x_2] \subset (a,b)$, то эта экстремаль для значений $x \in [x_1,x_2]$ может быть вложена в поле экстремалей.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$y = Y(x,\lambda)$$

в окрестности точки $(x, y_0(x), \lambda_0)$, где $x \in [x_1,x_2]$. В силу теоремы о неявной функции (здесь важно, что $Y'_\lambda(x,\lambda_0) \neq 0$ и в силу непрерывности это неравенство

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 141 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

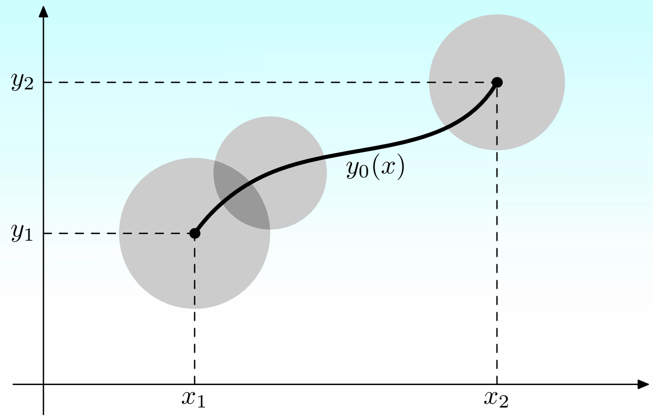


Рис. 16: Включение в поле экстремалей

выполнено и в некоторой окрестности точки λ_0) в некоторой окрестности точки $(x, y_0(x), \lambda_0)$ существует однозначно определенная функция

$$\lambda = \Lambda(x, y)$$

такая, что

$$y \equiv Y(x, \Lambda(x, y))\,, \qquad \lambda \equiv \Lambda(x, Y(x, \lambda))\,.$$

Построим такую функцию Λ в окрестности каждой точки $(x, y_0(x), \lambda_0)$, где $x \in [x_1, x_2]$. По лемме Гейна–Бореля уже конечное число окрестностей покроет кривую $y = y_0(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, см. рис. 16. Фиксируем такое конечное объединение окрестностей. Рассмотрим окрестность точки $(x_1, y_0(x_1), \lambda_0)$ и следующую за ней. В пересечении этих двух соседних окрестностей локальные функции Λ в силу единственности обязаны совпадать. Это позволяет продолжить функцию Λ с пер-

вой окрестности на объединение ее со второй. Повторив этот процесс продолжения несколько раз мы за конечное число шагов достигнем второго конца экстремали $y = y_0(x)$ и определим функцию Λ в некоторой окрестности U этой экстремали, точнее, в окрестности графика кривой $(x, y_0(x), \lambda_0)$, где $x \in [x_1, x_2]$. Окрестность U можно представлять в виде

$$U = U_{xy} \times (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)\,,$$

где U_{xy} — окрестность графика экстремали $y = y_0(x)$. Тогда функция Λ будет определена на U_{xy} и принимать значения в интервале $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$. Заметим, что функция Λ является непрерывно дифференцируемой (и даже дважды), как это следует из теоремы о неявной функции и равенств

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}\,, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}\,.$$

В окрестности U_{xy} рассмотрим функцию

$$z(x, y) = Y'_x(x, \Lambda(x, y))\,.$$

Эта функция является непрерывно дифференцируемой, т.к.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial \lambda} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial \lambda} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\,.$$

Как следствие, дифференциальное уравнение

$$y' = z(x, y)$$

удовлетворяет теореме существования и единственности решения задачи Коши. Но по построению экстремали семейства $y = Y(x, \lambda)$ удовлетворяют этому уравнению:

$$y' = Y'_x(x, \lambda)\,, \qquad z(x, Y(x, \lambda)) = Y'_x(x, \Lambda(x, Y(x, \lambda))) = Y'_x(x, \lambda)\,,$$

и при $\lambda = \lambda_0$ содержат экстремаль $y = y_0(x)$. Это в точности и означает, что построенная выше окрестность кривых семейства $Y(x, \lambda)$, графики которых лежат в U_{xy}, для значений параметра λ в интервале $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ образует поле экстремалей, в которое вложена экстремаль $y = y_0(x)$. $\square$

8.9. Достаточные условия Вейерштрасса

Принято различать два типа минимумов (максимумов) интегральных функционалов.

Определение 8.21. Значение $I[y]$ функционала I называется *сильным относительным минимум*, если функция y дает наименьшее значение интеграла I в классе функций, равномерно близких к y, т.е. если при некотором $\varepsilon > 0$ имеет место импликация

$$\|y - Y\|_C = \max_{x \in [x_1, x_2]} |y(x) - Y(x)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad I[y] \leqslant I[Y].$$

Как уже отмечалось ранее, равномерную ε-окрестность кривой $y = y(x)$ можно представлять себе как часть плоскости, покрываемую кривыми $y = Y(x)$, для которых вертикальное отклонение от кривой $y = y(x)$ меньше чем ε, см. рис. 5.

Определение 8.22. Значение $I[y]$ функционала I называется *слабым относительным минимум*, если функция y дает наименьшее значение интеграла I в классе функций, близких к y в смысле C^1-нормы, т.е. если при некотором $\varepsilon > 0$ имеет место импликация

$$\|y - Y\|_{C^1} = \max_{x \in [x_1, x_2]} |y(x) - Y(x)| + \max_{x \in [x_1, x_2]} |y'(x) - Y'(x)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad I[y] \leqslant I[Y].$$

Ясно, что C_1-окрестность функции y образуют только те функции из равномерной окрестности, которые в каждой точке не слишком сильно (а правильнее сказать — очень незначительно) отклоняются от направления функции y. На рис. 17 обе

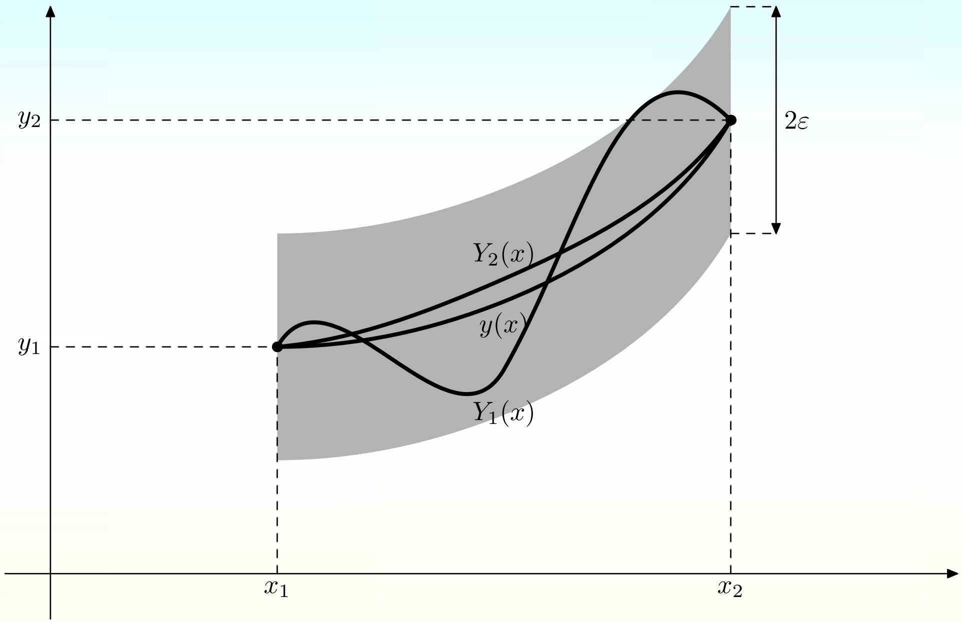


Рис. 17: C и C^1 окрестности функции y

кривые Y_1 и Y_2 лежат в равномерной ε-окрестности кривой y, но только Y_2 лежит в ε-окрестности в C^1-норме.

Таким образом сильным минимум обязательно будет являться и слабый, однако обратное, вообще говоря, не верно.

Отметим, что если минимум (слабый или сильный) достигается в некоторой окрестности функции y только на функции y, то его называют *строгим*.

Теорема 8.23 (Достаточное условие слабого относительного минимума). *Пусть функция $F(x, y, z)$ является трижды непрерывно дифференцируемой. Если кривая $y = y(x)$ не содержит угловых точек и удовлетворяет:*

1. *уравнению Эйлера:*
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\,,$$
2. *усиленному условию Лежандра:*
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0\,,$$
3. *усиленному условию Якоби: кривая $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ не содержит точки, сопряженной с начальной,*

то экстремаль y является строгим слабым минимумом функционала

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx\,.$$

в классе кривых с закрепленными концами:

$$y(x_1) = y_1\,, \qquad y(x_2) = y_2\,.$$

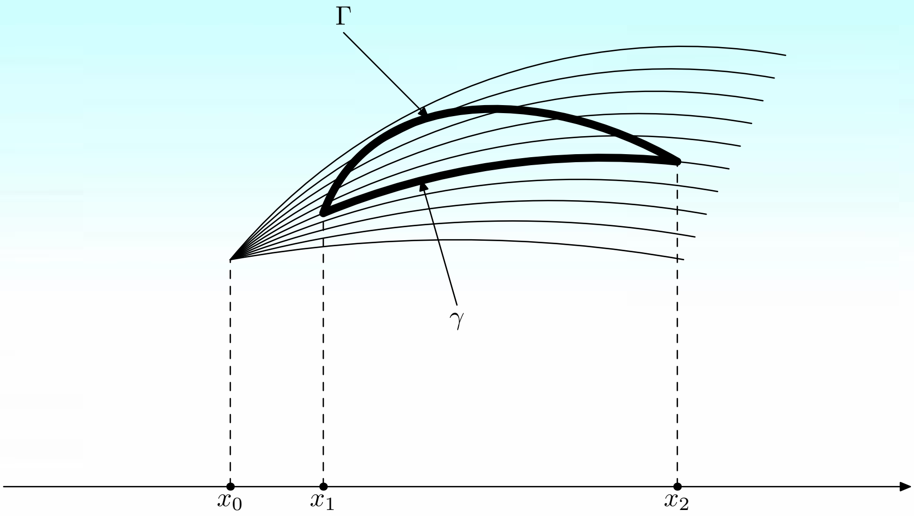


Рис. 18: Погружение в поле экстремалей

Доказательство. Рассмотрим экстремаль, удовлетворяющую условиям теоремы. Согласно условию Гильберта 7.3, y является трижды непрерывно дифференцируемой. Прежде всего погрузим экстремаль в поле экстремалей. Согласно следствию 8.14, существует продолжение этой экстремали на интервал $[x_0, x_2]$, $x_0 < x_1$, такое, что продолженная экстремаль также не имеет сопряженной точки относительно начальной. Рассмотрим однопараметрическое семейство экстремалей $y = y(x, \lambda)$, выпущенных из точки $(x_0, y(x_0))$, см. рис. 18. Будем считать, что исходная экстремаль выделяется заданием параметра $\lambda = \lambda_0$, см., например, теорему 8.2 и далее. В силу отсутствия сопряженных точек относительно точки x_0 на экстремали

$y = y(x, \lambda_0)$ заключаем:

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} \neq 0$$

при $\lambda = \lambda_0$ и $x \in (x_0, x_2]$. В частности, производная $y'_\lambda(x, \lambda_0)$ не обращается в ноль всюду при $x \in [x_1, x_2]$. Тогда по теореме 8.20 экстремаль $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ вкладывается в поле экстремалей $y = y(x, \lambda)$. Функцию наклона этого поля обозначим через $z(x, y)$.

Заметим, далее, что в силу формулы Тейлора:

$$F(x, y, v) = F(x, y, u) + F'_u(x, y, u)(v - u) + \frac{F''_{uu}(x, y, w)}{2}\,(v - u)^2\,,$$

где w — некоторая точка, лежащая между u и v. Как видим, функция Вейерштрасса $\mathcal{E}$ (8.29) удовлетворяет равенству

$$\mathcal{E}(x, Y, z, Y') = \frac{F''_{zz}(x, Y, Z)}{2}\,(Y' - z)^2\,, \tag{8.31}$$

где Z лежит между Y' и z. Усиленное условие Лежандра в силу непрерывности функции $F''_{y'y'}$ будет выполнено в достаточно малой окрестности V экстремали $y(x, \lambda_0)$ в смысле C^1-нормы. Ограничим как размеры поля экстремалей, так и множество сравнимых функций Y окрестностью V. Тогда в этой окрестности при $Y \neq y$

$$\mathcal{E}(x, Y, z, Y') > 0$$

и согласно формуле (8.30)

$$\Delta I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathcal{E}(x, Y, z, Y')\,dx > 0\,.$$

□

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 148 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Замечание 8.24. Отметим отдельно некоторые положения приведенного доказательства.

Во–первых, требование трижды непрерывной дифференцируемости F связано с обращением к условию Якоби, см. пункт 8.6.

Во–вторых, доказательство основывается на формуле (8.30) для полного приращения. Для того, чтобы произвольная (но близкая) сравнимая функция Y в каждой своей точке пересекалась некоторой экстремалью семейства и требуется построение поля экстремалей, в которое погружается исходная экстремаль.

В–третьих, построение поля основывается на теореме 8.2 и, прежде всего, условии $y'_\lambda \neq 0$. Отсутствие сопряженных точек гарантирует выполнение этого неравенства на сегменте $(x_0, x_2]$, где x_0 — начальная точка пучка экстремалей. Именно поэтому не достаточно выпустить пучок экстремалей из точки x_1, а приходится отступить влево от точки x_1. При этом важно сохранить условие Якоби и для сдвинутой точки, что гарантируется следствием 8.14.

Наконец, окрестность V следует представлять как множество точек (x, y, z) трехмерного пространства, удовлетворяющих условиям

$$x \in (x_1 - \delta, x_2 + \delta) \quad \Rightarrow \quad |y - y(x)| < \varepsilon\,, \quad |z - y'(x)| < \varepsilon\,,$$

для некоторых положительных δ и ε. Сравнимая функция Y, например, будет лежать в этой окрестности, если

$$x \in (x_1 - \delta, x_2 + \delta) \quad \Rightarrow \quad |Y(x) - y(x)| < \varepsilon\,, \quad |Y'(x) - y'(x)| < \varepsilon\,,$$

и аналогично для экстремалей поля.

Аналогично устанавливается

Теорема 8.25 (Достаточное условие сильного относительного минимума). *Пусть функция $F(x, y, z)$ является трижды непрерывно дифференцируемой. Если кривая $y = y(x)$ не содержит угловых точек и удовлетворяет:*

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 149 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

1. *уравнению Эйлера:*
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\,,$$
2. *усиленному условию Вейерштрасса: для* $(x, y, z) \in V$ *(где окрестность* V *экстремали* $y = y(x)$ *описана в замечании 8.24) и при произвольных* v
$$\mathcal{E}(x, y, z, v) > 0\,,$$
3. *усиленному условию Якоби: кривая* $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ *не содержит точки, сопряженной с начальной,*

то экстремаль y *является строгим сильным минимумом функционала*
$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx\,.$$
в классе кривых с закрепленными концами:
$$y(x_1) = y_1\,, \qquad y(x_2) = y_2\,.$$

В качестве примера докажем сначала, что экстремаль $y = \operatorname{ch} x$ является локальным слабым минимум в задаче о наименьшей поверхности вращения 4.3 с граничными условиями
$$y(0) = 1\,, \quad y(b) = \operatorname{ch} b\,.$$
Функция Лагранжа F имеет вид $F = y\sqrt{1 + y'^2}$. Условие Лежандра очевидно выполнено:
$$\frac{y}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0\,.$$

Составим уравнение Якоби (8.24). В нашем случае

$$A = -F_{yy'y'}y'' = -\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,,$$

$$B = F_{y'y'} = \frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,.$$

Тогда уравнение Якоби принимает вид

$$\left(\frac{\eta'}{\operatorname{ch}^2 x}\right)' + \frac{\eta}{\operatorname{ch}^2 x} = 0$$

или

$$\eta'' - 2\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\,\eta' + \eta = 0\,.$$

Одно решение этого уравнения угадывается:

$$\eta_1 = \operatorname{sh} x\,.$$

Второе решение, линейно независимое с первым, можно вычислить по известной формуле

$$\eta_2 = \eta_1 \int \frac{W}{\eta_1^2}\,dx\,,$$

где

$$W = e^{2\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\,dx} = \operatorname{ch}^2 x$$

— вронскиан решений. Тогда

$$\eta_2 = x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x\,.$$

Общее решение имеет вид

$$\eta = C_1\eta_1 + C_2\eta_2 = (C_1 + C_2x)\operatorname{sh} x + C_2\operatorname{ch} x\,.$$

Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Легко видеть, что единственным решением уравнения Якоби с нулевыми граничными условиями

$$\eta(0) = \eta(b) = 0$$

является только тривиальное $\eta \equiv 0$, т.е. на экстремали $y = \operatorname{ch} x$ нет точек, сопряженных с начальной точкой. Это завершает проверку достаточных условий слабого минимума.

Нетрудно, однако, заметить, что производная $F''_{y'y'}$ в данном случае положительна не только на экстремале $y = \operatorname{ch} x$, но при всех значениях аргументов в области $y > 0$:

$$F''_{y'y'} = \frac{y}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \,.$$

Как следствие, выполнены достаточные условия и для сильного минимума (функция Вейерштрасса $\mathcal{E}(x, y, u, v)$ положительна при $y > 0$, см. (8.31)).

8.10. Уравнение Гамильтона–Якоби

Вернемся к интегралу Гильберта (8.15)

$$U\{\gamma\} = \int\limits_{\gamma} [F(x, y, z) - zF'_z(x, y, z)]dx + F'_z(x, y, z)dy \,,$$

образованному для функции наклона $z = z(x, y)$ поля экстремалей функционала

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \,.$$

Как мы знаем, этот интеграл не зависит от формы кривой γ, а только от начала и конца интегрирования. Фиксировав начальную точку кривой γ и меняя ее конечную

точку, мы получим функцию двух переменных

$$S(x,y) = \int^{(x,y)} [F(x,y,z) - zF'_z(x,y,z)]dx + F'_z(x,y,z)dy\,,$$

или, более аккуратно,

$$S(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} [F(u,v,z) - zF'_z(u,v,z)]du + F'_z(u,v,z)dv\,, \tag{8.32}$$

где $z = z(u,v)$. Эта функция определена с точностью до постоянной и называется *функцией поля*. Кривые, на которых функция поля постоянна, называются *трансверсальными кривыми* поля. Название связано с тем фактом, что экстремали поля пересекаю такие кривые трансверсально:

$$[F(x,y,z) - zF'_z(x,y,z)]dx + F'_z(x,y,z)dy = 0\,,$$

ср. (5.15), имея в виду равенства $dy = \varphi'\,dx$ (т.к. это дифференциалы вдоль трансверсальных кривых) и $z = y'$ (т.к. это функция наклона поля экстремалей).

Найдем производные функции S:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = F(x,y,z) - zF'_z(x,y,z)\,, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = F'_z(x,y,z)\,,$$

где $z = z(x,y)$. В условиях регулярности (8.4), находим

$$z = P(x,y,p)\,, \qquad p = F'_z(x,y,z)\,.$$

При этом в согласии с определением преобразования Лежандра (8.11)

$$F(x,y,z) - zF'_z(x,y,z) = -H(x,y,p)\,.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -H(x, y, p)\,, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = p\,,$$

т.е. функция поля $S = S(x, y)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H\Big(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}\Big) = 0\,. \tag{8.33}$$

Оно называется *уравнением Гамильтона–Якоби*. При этом в канонических переменных, см. пункт 8.2,

$$S(x, y) = \int^{(x,y)} p\,dy - H\,dx\,,$$

где p и H следует рассматривать как сложные функции переменных x, y, определенные равенствами

$$\begin{aligned} H &= H(x, y, p) = zp - F(x, y, z)\,,\\ p &= F'_z(x, y, z)\,,\\ z &= z(x, y)\,. \end{aligned}$$

Заметим, что если через $S(x, y)$ обозначить произвольное решение уравнения Гамильтона–Якоби (8.33), то в условиях регулярности мы можем определить функцию наклона $z(x, y)$ некоторого поля направлений

$$z = P(x, y, p)\,, \qquad p = \frac{\partial S}{\partial y}\,,$$

где функция P определяется неявно равенством $p = F'_z(x, y, z)$. При этом интеграл Гильберта, составленный по функции наклона $z(x, y)$

$$U\{\gamma, z\} = \int_\gamma [F(x, y, z) - zF'_z(x, y, z)]dx + F'_z(x, y, z)dy\,,$$

не будет зависеть от пути интегрирования. Действительно, в силу уравнения Гамильтона–Якоби и определения функции Гамильтона

$$[F(x,y,z)-zF'_z(x,y,z)]\,dx+F'_z(x,y,z)\,dy=-H\,dx+p\,dy=\frac{\partial S}{\partial x}\,dx+\frac{\partial S}{\partial y}\,dy=dS(x,y)\,.$$

Более того, имеет место следующее утверждение.

Теорема 8.26 (Теорема Якоби). *Пусть функция Лагранжа F для интегрального функционала*

$$I=\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\,dx$$

является дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет условию регулярности

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\neq 0\,.$$

Пусть, далее, функция $S(x,y,\alpha)$ является дважды непрерывно дифференцируемой,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y\partial\alpha}\neq 0\,, \tag{8.34}$$

и при каждом значении параметра α удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial x}+H\Big(x,y,\frac{\partial S}{\partial y}\Big)=0\,.$$

Тогда любая непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\beta \tag{8.35}$$

при фиксированных значениях α и β, является экстремалью функционала I.

Доказательство. Запишем уравнение Гамильтона–Якоби в виде

$$S'_x + H = 0\,, \qquad H = H(x, y, p)\,, \qquad p = S'_y\,,$$

и продифференцируем его по параметру α:

$$S''_{\alpha x} + H'_p \cdot S''_{\alpha y} = 0\,.$$

Продифференцируем, также, по x тождество (8.35), заменяя y на $y(x)$:

$$S''_{x\alpha} + S''_{y\alpha} y' = 0\,.$$

Сопоставление этих равенств ввиду (8.34) и независимости дифференцирования от порядка приходим к равенству

$$y' = H'_p\,. \tag{8.36}$$

Аналогично, продифференцируем уравнение Гамильтона–Якоби по переменной y:

$$S''_{yx} + H'_y + H'_p \cdot S''_{yy} = 0\,,$$

а равенство $p = S'_y$, где $y = y(x)$, — по x:

$$p' = S''_{xy} + S''_{yy} y'\,.$$

Эти равенства совместно с (8.36) ведут к

$$p' = -H'_y\,.$$

Таким образом, функции $y(x)$ и $p(x)$ являются решением канонической системы

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p}\,, \qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}\,,$$

и значит функция $y(x)$ является экстремалью, см. пункт 8.2. $\square$

Отметим, что теорема Якоби позволяет построить двухпараметрическое семейство экстремалей

$$y = y(x, \alpha, \beta)\,,$$

где α и β те же, что и в равенстве (8.35).

В качестве примера рассмотрим функционал длины

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,.$$

Тогда

$$F(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}\,, \qquad p = F'_z = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}\,,$$

и, следовательно,

$$z = P(x, y, p) = \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}\,.$$

Далее находим функцию Гамильтона

$$H(x, y, p) = pz - F = \frac{p^2}{\sqrt{1 - p^2}} - \sqrt{1 + \frac{p^2}{1 - p^2}} = -\sqrt{1 - p^2}\,,$$

и составляем уравнение Гамильтона–Якоби

$$S'_x - \sqrt{1 - S'^2_y} = 0$$

или

$$S'^2_x + S'^2_y = 1\,.$$

Это уравнение в частных производных относится к типу уравнений

$$M(x, S'_x) + N(y, S'_y) = 0\,,$$

которые могут быть проинтегрированы следующим способом. Введем параметр α, составим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$M(x, S'_x) = \alpha\,, \qquad N(y, S'_y) = -\alpha\,,$$

и проинтегрируем их, разрешая относительно производных S'_x и S'_y, соответственно. Полученное решение будет иметь вид

$$S = S_1(x, \alpha) + S_2(y, \alpha) + S_0\,.$$

В рассматриваемом случае положим

$$S'_x = \alpha\,, \qquad S'_y = \sqrt{1 - \alpha^2}\,.$$

При этом

$$S_1 = \alpha x\,, \qquad S_2 = \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot y\,,$$

откуда

$$S = \alpha x + \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot y + S_0\,.$$

Экстремали, согласно теореме Якоби, будут находиться из равенства

$$x - \frac{\alpha y}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = \beta\,.$$

Например, экстремали, проходящие через начало координат, это прямые

$$y = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \cdot x\,.$$

Напомним, что интеграл Гильберта, взятый вдоль экстремали, совпадает со значением исходного функционала для этой экстремали. В этом случае для экстремали, соединяющей начало координат с точкой (x, y), находим

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \qquad \sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 158 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

откуда кратчайшее расстояние от точки (x, y) до начала координат равно (в этом случае $S_0 = 0$)

$$S(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Часть III
Приложения

Постановка некоторых ...

Введение в вариационный метод

Уравнение Эйлера–Лагранжа

Приложения

Обобщения

Задачи на условный экстремум

Первое необходимое условие ...

Семейства экстремалей

Динамика частиц

Проблема минимума ...

Существование минимума ...

Лемма Гейне-Бореля

Веб – страница

Титульный лист

Страница 161 из 197

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

9. Динамика частиц

9.1. Потенциальная и кинетическая энергия. Обобщенные координаты

9.1.1. Потенциальная энергия

Рассмотрим систему l частиц, положения которых подчиняются заданным геометрическим связям и которые, с другой стороны, взаимодействуют между собой с силами, зависящими только от положения частиц. Геометрические связи будут считаться постоянными во времени и могут состоять в том, что некоторые из частиц могут двигаться только вдоль заданных кривых или на заданных поверхностях, или в том, что сохраняется расстояние, разделяющее некоторые парные частицы. Силу, действующую на j-ую частицу, обозначим через $\mathbf{F}^j = (F_x^j, F_y^j, F_z^j)$, где декартовы компоненты являются функциями $3l$ координат

$$x_1, y_1, z_1, \ldots, x_l, y_l, z_l\,,$$

определяющих положения частиц системы.

Здесь мы рассмотрим только специальный случай системы — консервативную систему — для которой существует функция

$$V = V(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_l, y_l, z_l)\,, \tag{9.1}$$

определяющая силы:

$$F_x^j = -\frac{\partial V}{\partial x_j}\,, \quad F_y^j = -\frac{\partial V}{\partial y_j}\,, \quad F_z^j = -\frac{\partial V}{\partial z_j}\,, \quad (j = 1, \ldots, l)\,.$$

Функция V называется потенциальной энергией системы.

Веб – страница
Титульный лист
Страница 162 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

9.1.2. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия частицы массы m и скорости v определяется величиной

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\,.$$

Для системы l частиц кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} m_j(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2)\,, \tag{9.2}$$

где m_j — масса j-ой частицы. По определению $T \geqslant 0$.

9.1.3. Связи. Обобщенные координаты

Действие связей в системе l частиц сокращает число независимых переменных. Если связи, описывающие положения частиц, определяются k независимыми уравнениями

$$G_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_l, y_l, z_l) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)\,, \tag{9.3}$$

то количество независимых координат равно $3l - k$. Равенства (9.3) могут быть использованы для исключения k зависимых переменных.

Более удобно, однако, ввести $n = 3l - k$ независимых переменных $q_1, \ldots, q_n$, описывающих положения частиц. Это не что иное, как параметризация уравнений связей (9.3):

$$x_j = x_j(q_1, \ldots, q_n)\,, \quad y_j = y_j(q_1, \ldots, q_n)\,, \quad z_j = z_j(q_1, \ldots, q_n) \tag{9.4}$$

для $j = 1, \ldots, l$. Переменные $q_1 \ldots, q_n$ называются *обобщенными координатами*. Назначение их — описывать положения частиц системы, автоматически подчиняясь геометрическим ограничениям (связям).

Выбор обобщенных координат не является однозначным.

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 163 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

9.1.4. Обобщенные скорости. Лагранжиан

Равенства (9.1)-(9.4) определяют потенциальную энергию как [сложную] функцию обобщенных координат.

Для того, чтобы выразить кинетическую энергию T в терминах обобщенных координат, продифференцируем уравнения (9.4):

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\,\dot{q}_i\,, \quad \dot{y}_j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial y_j}{\partial q_i}\,\dot{q}_i\,, \quad \dot{z}_j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial z_j}{\partial q_i}\,\dot{q}_i\,. \tag{9.5}$$

Подставляя (9.5) в (9.2), мы получим кинетическую энергию как однородную функцию второй степени от обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$. Коэффициенты этой квадратичной формы обобщенных скоростей являются функциями обобщенных координат.

Считая, что переход к обобщенным координатам и скоростям совершен, введем функцию Лагранжа — Лагранжиан системы — как разность кинетической и потенциальной энергии:

$$L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = T - V\,.$$

9.2. Принцип Гамильтона. Уравнения движения Лагранжа

9.2.1. Принцип Гамильтона

Принцип Гамильтона принимается как удобный эквивалент законам Ньютона. Он гласит:

Действительные движения в системе с лагранжианом

$$T - V = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$$

описываются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $q_1(t), \ldots, q_n(t)$,

которые должны сообщать экстремум интегралу

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt\,,$$

для произвольных моментов времени t_1 *и* t_2.

9.2.2. Уравнения движений Лагранжа

Согласно принципам вариационного исчисления, действительные движения системы будут являться экстремалями, удовлетворяющими *системе уравнений Лагранжа*

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{9.6}$$

9.2.3. Первый интеграл

Так как лагранжиан не зависит явно от времени, согласно (5.3), находим первый интеграл системы

$$\sum_{i=1}^{n} \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L = E\,, \tag{9.7}$$

где величина E является постоянной. Заметим, что ввиду независимости потенциальной энергии от обобщенных скоростей

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\,.$$

Далее, однородность кинетической энергии по обобщенным скоростям приводит к равенству

$$\sum_{i=1}^{n} \dot q_i \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = 2T\,. \tag{9.8}$$

Как следствие,

$$E = 2T - (T - V) = T + V\,,$$

что означает, что постоянная E имеет смысл полной энергии системы. При этом мы вывели закон сохранения полной энергии в консервативной системе.

9.3. Обобщенные моменты. Гамильтоновы уравнения движения.

9.3.1. Обобщенные моменты

Имея дело с системой, состояние которой полностью определяется обобщенными координатами $q_1, \dots, q_n$ и лагранжианом L, определим *обобщенные моменты*

$$p_i \overset{\text{Опр.}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} \qquad (i = 1, \dots, n)\,. \tag{9.9}$$

Поскольку кинетическая энергия T является квадратичной формой относительно обобщенных скоростей $\dot q_i$, то обобщенные моменты p_i являются линейными однородными функциями обобщенных скоростей.

9.3.2. Гамильтониан. Канонические уравнения

Используя равенства (9.9), исключим обобщенные скорости из лагранжиана, выражая его через канонические переменные $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$, и определим гамильтониан системы

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot q_i - L\,. \tag{9.10}$$

Введение канонических переменных возможно, если, согласно условиям теоремы о неявной функции,

$$\frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(\dot q_1, \dots, \dot q_n)} = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j}\right) \neq 0 \qquad (\text{условие регулярности})\,.$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 166 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Как и в одномерном случае

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot q_j + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial \dot q_i}{\partial p_j}}_{} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \cdot \frac{\partial \dot q_i}{\partial p_j}}_{} = \dot q_j \qquad (j = 1, \ldots, n)\,.$$

Эти равенства являются явными решениями уравнений (9.9) относительно обобщенных скоростей:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = P_j\,, \qquad \dot q_j = P_j(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\,, \qquad p_j = L'_{\dot q_j}(t, q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n)\,.$$

Воспользуемся тождеством (9.8)

$$2T = \sum_{j=1}^{n} \dot q_j \frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\,.$$

Подстановка его в (9.10) дает

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\,\dot q_i - L = 2T - (T - V) = T + V\,,$$

что определяет смысл гамильтониана как полной энергии системы.

Далее,

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial \dot q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \cdot \frac{\partial \dot q_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}\,,$$

откуда в силу уравнений Эйлера–Лагранжа (9.6)

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\,.$$

Как и в одномерном случае мы пришли к канонической форме уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{dq_j}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_j}\,, \\[2ex] \dfrac{dp_j}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j}\,, \end{cases} \tag{9.11}$$

$j = 1, \ldots, n.$

9.3.3. Скобка Пуассона

Пусть $\Phi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ и $\Psi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ — две дифференцируемые функции канонических переменных. Их *скобкой Пуассона* $\{\Phi, \Psi\}$ называется функция

$$\{\Phi, \Psi\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \right).$$

Если теперь переменные $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ меняются согласно уравнениям движения (9.11), то

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \{H, \Phi\}\,.$$

Как следствие, величина Φ, не зависящая явно от времени, является первым интегралом уравнений движения (9.11) тогда и только тогда, когда ее скобка Пуассона с функцией Гамильтона равна нулю:

$$\Phi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \mathrm{Const} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{H, \Phi\} = 0\,.$$

9.3.4. Функция поля. Уравнение Гамильтона–Якоби

Интеграл Гильберта определяется равенством

$$U\{\gamma, \boldsymbol{f}\} = \int\limits_{\gamma} \Big[L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{f}) - \sum_{i=1}^{n} f_i L'_{f_i}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{f})\Big] dt + \sum_{i=1}^{n} L'_{f_i}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{f}) dq_i$$

$$= \int\limits_{\gamma} [L - \langle \boldsymbol{f} | \nabla_{\boldsymbol{f}} L \rangle] dt + \langle \nabla_{\boldsymbol{f}} L | d\boldsymbol{q} \rangle \,,$$

где $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ и $f_i = f_i(t, \boldsymbol{q})$ — функции наклона. Если $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{\lambda})$ — n-параметрическое семейство экстремалей $q_i = q_i(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и

$$f_i = \dot{q}_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \,,$$

то интеграл Гильберта не зависит от пути интегрирования (от формы пути, но не от конечной и начальной точек) при условии, что путь γ застилается экстремалями семейства $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{\lambda})$.

Как и в одномерном случае, если функции наклона f_i являются непрерывно дифференцируемыми в некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{q})$$

являются экстремалями функционала

$$I = \int\limits_{t_1}^{t2} L \, dt \,,$$

то говорят, что функция наклона $\boldsymbol{f}$ определяет поле экстремалей с полем направлений $(1, \boldsymbol{f})$. Через каждую точку области $\mathcal{D}$ проходит одна и только одна экстремаль поля.

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 169 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Если $\boldsymbol{f}$ — функция наклона поля экстремалей, то функция поля определяется равенством

$$S(t,\boldsymbol{q}) = \int^{(t,\boldsymbol{q})} [L - \langle \boldsymbol{f} | \nabla_{\boldsymbol{f}} L\rangle] dt + \langle \nabla_{\boldsymbol{f}} L | d\boldsymbol{q}\rangle = \int^{(t,\boldsymbol{q})} \langle \boldsymbol{p} | d\boldsymbol{q}\rangle - H\,dt\,, \quad \boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)\,.$$

Напомним, что в последнем равенстве функции p_i следует рассматривать как сложные

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\,, \qquad L = L(q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n)\,, \qquad \dot q_i = f_i\,.$$

При этом

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\,, \qquad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i\,,$$

что ведет к *уравнению Гамильтона–Якоби*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\Big) = 0\,,$$

или кратко

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\boldsymbol{q}, \nabla_{\boldsymbol{q}} S) = 0\,,$$

также определяющему функцию поля.

Если $S(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — n-параметрическое семейство решений уравнения Гамильтона–Якоби, то в условиях регулярности и при условии

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0\,,$$

решение $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$ системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{9.12}$$

при любых фиксированных значениях параметров α_i и β_i, является экстремалью функционала I. При этом равенства (9.12) (неявно) совместно с системой

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

определяют решение канонической системы (теорема Якоби).

9.3.5. Канонические преобразования

Выбор обобщенных координат и импульсов не является однозначным. Наряду с каноническими переменными $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, отвечающими гамильтониану H рассмотрим новые канонические переменные $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n$, отвечающие гамильтониану K, так что канонические уравнения примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_j}{dt} = \dfrac{\partial K}{\partial P_j}\,, \\ \dfrac{dP_j}{dt} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_j}\,, \end{cases}$$

$j = 1, \ldots, n$. Тот факт, что выписанные уравнения эквивалентны уравнениям (9.11) означает, что функции Лагранжа, отвечающие этим двум системам канонических уравнений, отличаются лишь на полную производную (по времени) некоторой функции обобщенных координат (как старых, так и новых), см. теорему 3.2:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K + \dot{W}\,, \qquad W = W(t, q_1, \ldots, q_n, Q_1, \ldots, Q_n)\,.$$

Умножая на dt и раскрывая полную производную функции W, найдем

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(p_i - \frac{\partial W}{\partial q_i}\Big)dq_i - \sum_{i=1}^{n}\Big(P_i + \frac{\partial W}{\partial P_i}\Big)dQ_i + \Big(K - H - \frac{\partial W}{\partial t}\Big)dt = 0\,,$$

откуда

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t}\,, \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}\,, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Описанные преобразования переменных называются *каноническими*, а функция W — *производящей функцией* данного канонического преобразования.

Элементарным примером канонического преобразования является преобразование

$$(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \mapsto (p_1, \ldots, p_n, -q_1, \ldots, -q_n)$$

с производящей функцией

$$W = q_1 Q_1 + \cdots + q_n Q_n\,,$$

так что

$$Q_i = p_i\,, \qquad P_i = -q_i \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 172 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

10. Проблема минимума квадратичного функционала

10.1. Вариационный метод в задаче на собственные значения

Рассмотрим задачу на минимум функционала

$$I[y] = \int_a^b [p(x)y'^2(x) + q(x)y^2(x)]\,dx\,. \qquad (10.1)$$

на множестве дважды непрерывно дифференцируемых вещественнозначных функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям

$$y(a) = y(b) = 0\,, \qquad (10.2)$$

и

$$\int_a^b y^2(x)\,dx = 1\,. \qquad (10.3)$$

Предполагается, что

1. $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция положительная функция: $p(x) \geqslant p_0 > 0 \quad (x \in [a, b])$

2. $q(x)$ — непрерывная вещественнозначная функция.

Уравнение Эйлера–Лагранжа этой изопериметрической задачи имеет вид

$$qy - (py')' - \lambda y = 0\,, \qquad (10.4)$$

т.е. пара (λ, y) является собственным значением и собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле. Это условие необходимо.

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 173 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Положим

$$L[y] = qy - (py')' \,.$$

Напомним некоторые элементарные свойства решений задачи Штурма–Лиувилля

$$L[y] = \lambda y \,,$$

$$\begin{cases} y(a) = 0 \,, \\ y(b) = 0 \,. \end{cases}$$

1. Если $y(x)$ — собственная функция уравнения Штурма–Лиувилля, то $y'(a) \neq 0$ и $y'(b) \neq 0$.

   Действительно, если, например, $y'(a) = 0$, то в силу $y(a) = 0$ и единственности решения задачи Коши функция y тождественна равна нулю: $y(x) \equiv 0$.

2. Каждому собственному значению отвечает единственная с точностью до знака нормированная собственная функция.

   Действительно, если y_1 и y_2 — собственные функции, отвечающие собственному значению λ, то их линейная комбинация

   $$y(x) = y_2'(a) y_1(x) - y_1'(a) y_2(x)$$

   также удовлетворяет уравнению $L[y] = \lambda y$ и нулевым начальным данным $y(a) = 0\,,\ y'(a) = 0$, т.е. тождественно равна нулю. Как следствие, решения y_1 и y_2 пропорциональны. Условие нормировки

   $$\int\limits_a^b y^2(x)\, dx = 1$$

   фиксирует собственную функцию с точность до знака.

3. Собственные значения задачи Штурма–Лиувилля вещественны. Соответствующие им собственные функции могут быть выбраны вещественными.

Действительно, если f и g — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие нулевым граничным условиям

$$f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0\,,$$

то формула интегрирования по частям оправдывает равенство

$$\int\limits_a^b [qf - (pf')']\overline{g}\,dx = \int\limits_a^b f[q\overline{g} - (p\overline{g}')']\,dx\,.$$

Таким образом, полагая по определению

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_a^b f\overline{g}\,dx\,, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle}\,,$$

заключаем, что

$$\langle L[f]|g\rangle = \langle f|L[g]\rangle\,.$$

Это свойство называется симметричностью оператора L. Если теперь y — собственная функция, отвечающая собственному значению λ, то

$$\lambda\|y\|^2 = \langle L[y]|y\rangle = \langle y|L[y]\rangle = \overline{\lambda}\|y\|^2\,,$$

откуда в силу $\|y\| \neq 0$ получаем $\lambda = \overline{\lambda}$, т.е. λ — вещественно.

Далее заметим, что в силу линейности уравнения $L[y] = \lambda y$ и вещественности коэффициентов p и q отдельно вещественная и мнимая части собственной функции y будут являться решениями уравнения этого уравнения.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать вещественность собственных функций.

4. Различным собственным значениям λ_1 и λ_2 отвечают ортогональные собственные функции y_1 и y_2:

$$\langle y_1|y_2\rangle = \int\limits_a^b y_1 y_2\, dx = 0\,.$$

Действительно,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle y_1|y_2\rangle = \langle L[y_1]|y_2\rangle - \langle y_1|L[y_2]\rangle = 0\,.$$

Перейдем теперь к свойствам, связывающим квадратичный функционал $I[y]$ и оператор $L[y]$. Прежде всего отметим равенства

$$I[y] = \int\limits_a^b [py'^2 + qy^2]\, dx = \int\limits_a^b [-(py')'y + qy^2]\, dx = \int\limits_a^b L[y]y\, dx = \langle L[y]|y\rangle\,. \tag{10.5}$$

Положим по определению

$$K(f,g) = \int\limits_a^b [pf'g' + qfg]\, dx\,. \tag{10.6}$$

Этот функционал является билинейным. Отметим, что

$$I[y] = K(y,y)$$

и

$$I(y+\eta) = I(y) + I(\eta) + 2K(y,\eta)\,.$$

Для функций, удовлетворяющим нулевым граничным условиям

$$K(f,g) = \int\limits_a^b [-(pf')' + qf]g\, dx = \langle L[f]|g\rangle\,.$$

Очевидны свойства

1. Если λ — собственное значение, отвечающее нормированной собственной функции y оператора L, то
$$I[y] = \lambda\,. \tag{10.7}$$
Действительно,
$$I[y] = \langle L[y]|y\rangle = \lambda\|y\|^2 = \lambda\,.$$
2. Если y собственная функция оператора L, а z — ортогональна к y, то
$$K(y,z) = 0\,. \tag{10.8}$$
Действительно, если λ — соответствующее y собственное значение, то
$$K(y,z) = \langle L[y]|z\rangle = \lambda\langle y|z\rangle = 0\,.$$

Пусть теперь ищется функция y, сообщающая минимум функционалу $I[y]$. Можно доказать, см. приложение A, что существует нормированная непрерывно дифференцируемая функция $y = y_1(x)$, доставляющая минимум интегралу $I[y]$. При некотором значении $\lambda = \lambda_1$ она должна удовлетворять уравнению Эйлера (10.4). Это означает, что задача Штурма–Лиувилля имеет собственную функцию y_1, отвечающую собственному значению λ_1. При этом
$$\min_{\|y\|=1} I[y] = I[y_1] = \lambda_1\,.$$
Как следствие, отметим неравенство
$$I[y] \geqslant \lambda_1\|y\|^2\,, \tag{10.9}$$
причем знак равенства имеет место только для функций $\pm y_1$. Действительно, если $\|y\| = k$, то
$$I[y] = I[kz] = k^2 I[z] \geqslant k^2\lambda_1\,,$$

где $z = \dfrac{y(x)}{k}$, $\|z\| = 1$.

Теорема 10.1. *Все собственные значения оператора Штурма–Лиувилля L могут быть расположены в возрастающую бесконечную последовательность*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

При этом, если $y_1, y_2 \ldots$ — последовательность соответствующих нормированных собственных функций, то для всякого $n \in \mathbb{N}$ собственное значение λ_n равно минимуму функционала $I[y]$ при условиях

$$\int_a^b y^2\,dx = 1\,, \quad \int_a^b yy_i\,dx = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

и нулевых граничных условиях

$$y(a) = y(b) = 0\,.$$

Минимум достигается на функции y_n.

Доказательство. Как мы видели выше, утверждение теоремы справедливо при $n = 1$. Предположим, что собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, соответствующие собственным функциям $y_1, \ldots, y_{n-1}$, также определены в согласии с утверждениями теоремы. Рассмотрим задачу на минимум функционала $I[y]$ при условиях

$$y(a) = y(b) = 0\,, \quad \int_a^b y^2\,dx = 1\,, \quad \int_a^b yy_i\,dx = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)\,.$$

Как упоминалось выше, можно показать, что решение такой задачи существует и является непрерывно дифференцируемой функцией, см. приложение А. В согласии

с теорией изопериметрических задач, эта минимизирующая функция является безусловной экстремалью функционала

$$J = \int_a^b \Big[py'^2 + qy^2 - \mu y^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i y_i y\Big]\, dx\,,$$

где μ и $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ — множители Лагранжа. Уравнение Эйлера

$$2qy - 2\mu y - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i y_i - (py')' = 0$$

имеет вид

$$L[y] = \mu y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i y_i\,.$$

Умножая это равенство на y_j, $(j < n)$ и интегрируя, находим

$$0 = K(y, y_j) = \langle L[y] | y_j \rangle = \mu \langle y | y_j \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i \langle y_i | y_j \rangle = \frac{\nu_j}{2}\,,$$

где мы использовали условия ортогональности и свойство (10.8). Итак, все множители ν_j являются нулями, т.е. уравнение Эйлера превращается в уравнение Штурма–Лиувилля

$$L[y] = \mu y\,,$$

функция y является собственной и в силу (10.7)

$$I[y] = \mu\,,$$

т.е. μ является наименьшим значением интеграла I в рассматриваемой задаче на условный экстремум. Остается заметить, что нормированная собственная функция

Веб – страница
Титульный лист
Страница 179 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

y_n, отвечающая собственному значению λ_n, также удовлетворяет условиям

$$I[y_n] = \lambda_n\,, \quad y_n(a) = y_n(b) = 0\,, \quad \int\limits_a^b y_n^2\,dx = 1\,, \quad \int\limits_a^b y_n y_i\,dx = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)\,,$$

что означает, что $\lambda_n \geqslant \mu$, а следовательно, $\lambda_n = \mu$. Апелляция к методу математической индукции завершает доказательство теоремы. □

10.2. Минимаксное свойство собственных чисел

Отметим, далее, следующее свойство собственных чисел.

Теорема 10.2 (Курант). *Пусть μ — минимум интеграла $I[y]$ при условиях*

$$\int\limits_a^b y^2\,dx = 1\,, \quad \int\limits_a^b z_i y\,dx = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)\,,$$

где $z_1, \ldots, z_{n-1}$ — произвольные фиксированные непрерывно дифференцируемые функции. Тогда

$$\mu \leqslant \lambda_n\,,$$

где λ_n — собственное значение оператора Штурма–Лиувилля, ассоциированного с квадратичным функционалом $I[y]$.

Доказательство. Положим

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j\,,$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля

Веб – страница
Титульный лист
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 180 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

где $y_1 \ldots, y_n$ — нормированные собственные функции соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Фиксируем коэффициенты c_j так, чтобы

$$\int\limits_a^b y^2\,dx = \sum_{i=1}^n c_j^2 = 1\,,$$

$$\int\limits_a^b z_i y\,dx = \sum_{i=1}^n A_{ij} c_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)\,,$$

где $A_{ij} = \langle z_i | y_j \rangle$. Эта система имеет решение, поскольку

$$\operatorname{rank}(A_{ij}) \leqslant n - 1\,.$$

Тогда

$$\mu \leqslant I[y] = I\Big[\sum_{j=1}^n c_j y_j\Big] = \sum_{j=1}^n c_j^2 I[y_j] + \sum_{i \neq j} c_i c_j K(y_i, y_j) = \sum_{j=1}^n c_j^2 \lambda_j \leqslant \lambda_n \sum_{j=1}^n c_j^2 = \lambda_n\,.$$

□

Следствие 10.3. *Пусть при всех* $x \in [a, b]$

$$p(x) \leqslant P(x)\,, \quad q(x) \leqslant Q(x)\,.$$

Пусть λ_n *и* Λ_n *— упорядоченные по возрастанию последовательности собственных значений задач Штурма–Лиувилля, ассоциированных с функционалами*

$$I[y] = \int\limits_a^b [py'^2 + qy^2]\,dx\,, \quad J[y] = \int\limits_a^b [Py'^2 + Qy^2]\,dx\,.$$

Тогда

$$\lambda_n \leqslant \Lambda_n\,.$$

Доказательство. Пусть y_n и Y_n — соответствующие нормированные собственные функции для рассматриваемых задач Штурма–Лиувилля. Пусть, далее, $z_1, \dots, z_{n-1}$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Заметим, что

$$\forall y: \qquad I[y] \leqslant J[y]\,,$$

откуда

$$\min_{\substack{\|y\|=1 \\ y\perp z_1,\dots,z_{n-1}}} I[y] \leqslant \min_{\substack{\|y\|=1 \\ y\perp z_1,\dots,z_{n-1}}} J[y]\,.$$

Правая часть достигает своего наибольшего значения, равного Λ_n (в силу теоремы Куранта), если положить $z_1 = Y_1, \dots, z_{n-1} = Y_{n-1}$, при этом

$$\min_{\substack{\|y\|=1 \\ y\perp z_1,\dots,z_{n-1}}} I[y] \leqslant \Lambda_n\,.$$

Остается в последнем неравенстве выбрать $z_1 = y_1, \dots, z_{n-1} = y_{n-1}$, что ведет к требуемому

$$\lambda_n \leqslant \Lambda_n\,.$$

□

Следствие 10.4. *Последовательность собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля стремится к бесконечности:* $\lambda_n \to +\infty$.

Доказательство. Действительно, положим

$$p_1 = \min p(x)\,, \quad q_1 = \min q(x)\,, \quad p_2 = \max p(x)\,, \quad q_2 = \max q(x)\,,$$

и определим функционалы

$$I_j[y] = \int\limits_a^b [p_i y'^2 + q_i y^2]\,dx \qquad (j = 1, 2)\,.$$

Задачи Штурма–Лиувилля для этих функционалов имеют вид

$$-p_j y'' + q_j y - \lambda y = 0\,, \qquad y(a) = y(b) = 0\,,$$

и легко решаются. Действительно, фундаментальная система решений образована функциями

$$e^{ik_j x}\,, \quad e^{-ik_j x}\,,$$

где

$$k_j^2 = \frac{\lambda - q_j}{p_j}\,.$$

Граничные условия ведут к системе

$$\begin{cases} C_1 e^{ik_j a} + C_2 e^{-ik_j a} = 0 \\ C_1 e^{ik_j b} + C_2 e^{-ik_j b} = 0\,, \end{cases}$$

которая имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$e^{ik_j a} e^{-ik_j b} - e^{-ik_j a} e^{ik_j b} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2ik_j(b-a)} = 1\,,$$

что означает, что k_j должно быть вещественным (будем считать его также неотрицательным) и равным

$$k_j = \frac{\pi n}{b - a} \qquad (n = 0, 1, \ldots)\,.$$

Таким образом, мы нашли собственные значения $\lambda_n(j)$ этих задач

$$\lambda_n(j) = \frac{\pi^2 n^2 p_j}{(b-a)^2} + q_j$$

и, тем самым, оценку для собственных значений основной задачи

$$\frac{\pi^2 n^2 p_1}{(b-a)^2} + q_1 \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{\pi^2 n^2 p_2}{(b-a)^2} + q_2\,.$$

Расходимость λ_n к бесконечности теперь очевидна. □

A. Существование минимума квадратичного функционала

В этом разделе мы докажем существование непрерывно дифференцируемой функции y, доставляющей минимум квадратичному функционалу из параграфа 10.

A.1. Минимизирующая последовательность

Прежде всего заметим, что при условии

$$\int_a^b |y|^2\,dx = 1$$

значения функционала $I[y]$ ограничены снизу:

$$I[y] = \int_a^b [py'^2 + qy^2]\,dx \geqslant q_1 \int_a^b y^2\,dx = q_1\,, \qquad q_1 = \min q\,.$$

Положим

$$I_1 = \inf I[y]\,,$$

при условии

$$y(a) = y(b) = 0\,, \quad \|y\|^2 = 1\,, \quad \langle y|y_i\rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, N-1)\,. \tag{A.1}$$

При этом $I_1 \geqslant q_1$. Согласно свойств точных границ существует последовательность дифференцируемых функций u_n, удовлетворяющих условиям

$$u_n(a) = u_n(b) = 0\,, \quad \|u_n\|^2 = 1\,, \quad \langle u_n|y_i\rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, N-1)\,,$$

таких, что

$$I[u_n] \to I_1\,.$$

Последовательность u_n называется минимизирующей.

A.2. Существование непрерывного предела

Последовательность u_n вообще говоря не сходится. Однако мы покажем, что некоторая ее подпоследовательность u_{n_k} равномерно сходится к непрерывной функции y.

Во-первых, отметим одно важное свойство минимизирующей последовательности. Полагая $p_1 = \min p$, находим предварительно

$$\int\limits_a^b u_n'^2\, dx \leqslant \frac{1}{p_1} \int\limits_a^b p u'^2\, dx \leqslant \frac{I[u_n] - q_1}{p_1} \leqslant C\,,$$

где C не зависит от n, т.к. последовательность $I[u_n]$ ограничена. Как следствие, согласно неравенству Шварца

$$|u_n(x_2) - u_n(x_1)| = \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} 1 \cdot u_n'(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{|x_2 - x_1|} \cdot \sqrt{\int\limits_{x_1}^{x_2} u_n'^2(x)\, dx} \leqslant C\sqrt{|x_2 - x_1|}\,,$$

где x_1 и x_2 — произвольные точки интервала $[a, b]$. Подчеркнем, что оценка

$$|u_n(x_2) - u_n(x_1)| \leqslant C\sqrt{|x_2 - x_1|} \qquad (\text{A.2})$$

верна при всех n. Такое свойство называют равностепенной непрерывностью последовательности u_n. Из него, в частности, вытекает равномерная ограниченность функций u_n:

$$|u(x)| \leqslant C\sqrt{b - a}\,.$$

Во-вторых, отметим, что непрерывную функцию достаточно определить лишь на множестве рациональных чисел из $[a, b]$. Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность всех рациональных чисел из $[a, b]$. Последовательность чисел $u_n(r_1)$ ограничена, а следовательно, из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность

$$u_{1n}(r_1) \to y(r_1)\,.$$

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 185 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Последовательность чисел $u_{1n}(r_2)$ также ограничена и из нее снова можно извлечь сходящуюся

$$u_{2n}(r_2) \to y(r_2)\,.$$

Отметим, что последовательность функций u_{2n} сходится уже в двух точках — r_1 и r_2. Продолжая этот процесс неограниченно, рассмотрим диагональную последовательность u_{nn}. Эта последовательность будет сходится в любой точке r_k, т.к. при $n > k$ она становится подпоследовательностью последовательности u_{kn}, которая по построению сходится при $r_1, \ldots, r_k$. Переходя к пределу в неравенстве

$$|u_{nn}(x_2) - u_{nn}(x_1)| \leqslant C\sqrt{|x_2 - x_1|}\,,$$

где x_1 и x_2 — произвольные рациональные точки интервала $[a, b]$, получим неравенство

$$|y(x_2) - y(x_1)| \leqslant C\sqrt{|x_2 - x_1|}\,,$$

т.е. построенная функция y является непрерывной на множестве рациональных точек и может быть продолжена по непрерывности на все точки из интервала $[a, b]$ с сохранением последнего неравенства уже для произвольных точек x_1 и x_2 из интервала $[a, b]$.

Нетрудно видеть, что наша диагональная последовательность u_{nn} сходится к y во всех точках интервала. Действительно,

$$|u_{nn}(x) - y(x)| \leqslant |u_{nn} - u_{nn}(r)| + |u_{nn}(r) - y(r)| + |y(r) - y(x)| \leqslant 2\sqrt{|x - r|} + |u_{nn}(r) - y(r)|\,.$$

Остается выбрать рациональное приближение r числа x так, чтобы для произвольного наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ было выполнено неравенство

$$2\sqrt{|x - r|} < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

а затем выбрать n достаточно большим так, чтобы

$$|u_{nn}(r) - y(r)| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 186 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

что в совокупности даст

$$|u_{nn}(x) - y(x)| < \varepsilon\,.$$

Остается показать, что из последовательности u_{nn} можно извлечь подпоследовательность, которая сходится к y уже равномерно. Это опять является следствием (A.2). Действительно определим x_n как точку наибольшего значения функции $|u_{nn} - y(x)$ на интервале $[a, b]$. Тогда из последовательности x_n можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c \in [a, b]$. Положим $v_k = u_{n_k n_k}$, тогда

$$\begin{aligned}|v_k(x) - y(x)| &\leqslant |v_k(x_{n_k}) - y(x_{n_k})| \\ &\leqslant |v_k(x_{n_k}) - v_k(c)| + |v_k(c) - y(c)| + |y(c) - y(x_{n_k})| \\ &\leqslant 2C\sqrt{|x_{n_k} - c|} + |v_k(c) - y(c)|\,.\end{aligned}$$

Правую часть полученного неравенства можно сделать сколь угодно малой при достаточно больших k, что означает, что последовательность v_k сходится к y равномерно.

Заметим, что тогда

$$\langle y|y_i\rangle = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N-1)\,.$$

A.3. Дифференцируемость предельной функции

. Итак, пусть v_n — построенная выше минимизирующая последовательность, равномерно сходящаяся к функции y. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция η удовлетворяет условиям

$$\eta(a) = \eta(b) = 0\,, \quad \eta'(a) = \eta'(b) = 0\,, \quad \langle \eta|y_i\rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, N-1)\,. \tag{A.3}$$

Тогда функция

$$\frac{v_n(x) + t\eta(x)}{\|v_n + t\eta\|}$$

Веб – страница
Титульный лист
Страница 187 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

удовлетворяет условиям (A.1), откуда

$$I[v_n + t\eta] \geqslant \|v_n + t\eta\|^2 I_1\,,$$

и следовательно,

$$I[v_n] + 2tK(v_n, \eta) + t^2 I[\eta] \geqslant (\|v_n\|^2 + 2t\langle v_n|\eta\rangle + t^2\|\eta\|^2)I_1$$

при всех вещественных t. Последнее неравенство запишем в виде

$$t^2(I[\eta] - I_1\|\eta\|^2) + 2t\langle L[\eta] - I_1\eta|v_n\rangle + I[v_n] - I_1 \geqslant 0\,,$$

что позволит перейти к пределу при $n \to \infty$(здесь важно, что в скалярном произведении $\langle L[\eta] - I_1\eta|v_n\rangle$ функция v_n не подвергается дифференцированию и можно воспользоваться теоремой о переходе к пределу под знаком интеграла)

$$t^2(I[\eta] - I_1\|\eta\|^2) + 2t\langle L[\eta] - I_1\eta|y\rangle \geqslant 0\,.$$

При всех t это может иметь место только в случае равенства

$$\langle L[\eta] - I_1\eta|y\rangle = 0\,. \tag{A.4}$$

Распишем левую часть подробнее

$$\int\limits_a^b [q\eta - (p\eta')' - I_1\eta]y\,dx = \int\limits_a^b [(q - I_1)y\eta - p'y\eta' - py\eta'']\,dx$$

и проинтегрируем по частям, полагая

$$f_1 = \int\limits_a^x p'y\,dx\,, \qquad f_2 = \int\limits_a^x dx \int\limits_a^x (q - I_1)y\,dx\,.$$

Получим

$$\int\limits_a^b [f_2 + f_1 - py]\eta''\,dx = 0\,.$$

Функция η может считаться теперь произвольной дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяющей условиям

$$\eta(a) = \eta(b) = 0\,, \quad \eta'(a) = \eta'(b) = 0\,.$$

Действительно, если η такая функция, то функция

$$\eta_N = \eta - \sum_{k=1}^{N-1} \langle \eta | y_k \rangle y_k$$

будет удовлетворять условиям (A.3), и следовательно,

$$\langle L[\eta_N] - I_1 \eta_N | y \rangle = 0\,.$$

Но

$$\langle L[\eta] | y_i \rangle y_i = \langle \eta | L[y_i] \rangle y_i = \langle \eta | y_i \rangle \lambda_i y_i = \langle \eta | y_i \rangle L[y_i]\,,$$

откуда

$$(L[\eta])_N = L[\eta] - \sum_{k=1}^{N-1} \langle L[\eta] | y_k \rangle y_k = L[\eta] - \sum_{k=1}^{N-1} \langle \eta | y_k \rangle L[y_k] = L[\eta - \sum_{k=1}^{N-1} \langle \eta | y_k \rangle y_k] = L[\eta_N]\,,$$

и следовательно,

$$\begin{aligned} \langle L[\eta_N] - I_1 \eta_N | y \rangle &= \langle (L[\eta] - I_1 \eta)_N | y \rangle \\ &= \langle L[\eta] - I_1 \eta | y \rangle - \sum_{k=1}^{N-1} \langle L[\eta] - I_1 \eta | y_k \rangle \langle y_k | y \rangle = \langle L[\eta] - I_1 \eta | y \rangle = 0\,. \end{aligned}$$

Согласно обобщенной лемме Дюбуа–Реймона, см. ниже,

$$f_2 + f_1 - py = 0\,,$$

откуда и вытекает дифференцируемость функции y (функции f_1, f_2 и p являются дифференцируемыми).

Непрерывная дифференцируемость функции y является следствием условий Вейерштрасса–Эрдмана:

$$p(x_0)y'(x_0 - 0) = p(x_0)y'(x_0 + 0)\,.$$

A.4. Обобщенная лемма Дюбуа–Реймона

Если для всех дважды непрерывно дифференцируемых функций η, удовлетворяющих условиям

$$\eta(a) = \eta(b) = \eta'(a) = \eta'(b) = 0$$

выполнено равенство

$$\int\limits_a^b f\eta''\,dx = 0\,,$$

то непрерывная функция f равна некоторой линейной функции $Ax + B$.

Для доказательства достаточно положить

$$\eta(x) = \int\limits_a^x dt \int\limits_a^t f(\tau)\,d\tau - C_1(x-a)^3 - C_2(x-a)^2$$

Постановка некоторых . . .
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие . . .
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума . . .
Существование минимума . . .
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 190 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

и определить постоянные C_1 и C_2 из равенств

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^x dt f(t) - C_1\Delta^3 - C_2\Delta^2 = 0\,,$$

$$\int\limits_a^b f\,dx - 3C_1\Delta^2 - 2C_2\Delta = 0\,,$$

где $\Delta = b - a$. При этом

$$\eta'' = f - 6C_1(x-a) - 2C_2\,,$$

$$\int\limits_a^b f\,dx = 3C_1\Delta^2 + 2C_2\Delta\,,$$

$$\int\limits_a^b f(x)(x-a)\,dx = \Delta\int\limits_a^b f\,dx - C_1\Delta^3 - C_2\Delta^2 = 2C_1\Delta^3 + 2C_2\Delta^2\,.$$

Заметим, что

$$\int\limits_a^b \eta''\cdot[6C_1(x-a)+2C_2]\,dx = 6C_1\int\limits_a^b f(x)(x-a)\,dx + 2C_2\int\limits_a^b f\,dx - \int\limits_a^b [6C_1(x-a)+2C_2]^2\,dx$$

$$= 6C_1[2C_1\Delta^3 + C_2\Delta^2] + 2C_2[3C_1\Delta^2 + 2C_2\Delta] - 12C_1^2\Delta^3 - 12C_1C_2\Delta^2 - 4C_2\Delta = 0\,,$$

и тогда

$$\int\limits_a^b f\eta''\,dx = \int\limits_a^b [f - 6C_1(x-a) - 2C_2]\eta''\,dx = \int\limits_a^b \eta''^2\,dx = 0\,,$$

Постановка некоторых ...
Введение в вариационный метод
Уравнение Эйлера–Лагранжа
Приложения
Обобщения
Задачи на условный экстремум
Первое необходимое условие ...
Семейства экстремалей
Динамика частиц
Проблема минимума ...
Существование минимума ...
Лемма Гейне-Бореля
Веб – страница
Титульный лист
Страница 191 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

откуда $\eta'' \equiv 0$, т.е.

$$f(x) = 6C_1(x-a) + 2C_2\,.$$

Веб – страница
Титульный лист
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

B. Лемма Гейне-Бореля

Если отрезок $[a, b]$ содержится в объединении открытых интервалов $\bigcup G_\alpha$, то уже конечное число этих интервалов покрывает отрезок $[a, b]$:

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n : \qquad [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \, .$$

Для доказательства, предположим противное, т.е. то, что интервал $[a, b]$ не может быть покрыт конечным числом интервалов G_α. Поделим этот интервал пополам. Тогда хотя бы один из интервалов $[a, c]$ или $[c, b]$, где c — середина отрезка $[a, b]$, не покрывается конечным числом интервалов. Продолжая этот процесс деления до бесконечности, построим последовательность вложенных интервалов, каждый из которых вдвое меньше предыдущего и не может быть покрыт конечным числом интервалов G_α:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots [a_n, b_n] \supset \ldots$$

По аксиоме Кантора–Дедекинда, существует точка пересечения всех этих отрезков

$$x_0 = \bigcap [a_n, b_n] \, .$$

Эта точка содержится в некотором интервале G_{α_0}. Если n достаточно велико, то $[a_n, b_n] \subset G_{\alpha_0}$, т.е. $[a_n, b_n]$ покрывается всего лишь одним интервалом. Противоречие.

Доказанное свойство называется компактностью замкнутого ограниченного интервала $[a, b]$.

Свойство компактности сохраняется при непрерывных отображениях. Пусть $\boldsymbol{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$ — непрерывная вектор–функция $[a, b] \to \mathbb{R}^k$. Предположим, что объединение открытых шаров $\bigcup B_\alpha$ содержит график функции $\boldsymbol{\varphi}$. Лемма Гейне–Бореля утверждает, что уже конечное число этих шаров будет покрывать график этой функции.

Веб – страница
Титульный лист
Страница 193 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Действительно, фиксируем произвольно точку $x \in [a,b]$ и шар B_α, содержащий образ этой точки: $\boldsymbol{\varphi}(x) \in B_\alpha$. В силу непрерывности функции $\boldsymbol{\varphi}$ существует открытый интервал G_α, каждая точка которого при отображении $\boldsymbol{\varphi}$ попадает в шар B_α. Построим подобный интервал G_α для каждой точки x отрезка $[a,b]$. Уже конечное их число $G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_k}$ будет покрывать отрезок $[a,b]$. Тогда соответствующие шары $B_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_k}$ будут покрывать график функции $\boldsymbol{\varphi}$.

Предметный указатель

Список литературы

[1] Блисс Г.А. *Лекции по вариационному исчислению.* ИЛ, М., 1950.

[2] Буслаев В.С. *Вариационное исчисление.* Издателльство Ленинградского университета, Ленинград, 1980.

[3] Гельфанд И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление.* ФМ, М., 1961.

[4] Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. *Курс вариационного исчисления.* ГИТТЛ, М., 1950.

[5] Лаврентьев М. и Люстерник Л. *Основы вариационного исчисления,* т.1, ч.II. ОНТИ, М., 1935.

[6] Ракин Л.В. *Введение в вариационное исчисление.* Издателльство Санкт–Петербургского университета, Ленинград, 1980.

[7] Смирнов В.И. *Курс высшей математики,* т.4, ч.1. Наука, М., 1974.

[8] Шварц Л. *Анализ,* т.1. Мир, М., 1972.

[9] Sagan H. *Introduction to the calculus of variations.* Dover publications, Inc., N.Y., 1993.

[10] Weinstock R. *Calculus of variations with applications to physics and engineering.* Dover publications, Inc., N.Y., 1992.

Веб – страница
Титульный лист
Страница 197 из 197
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход