

# Геометрические вопросы теории дифференциальных уравнений

А.М.Будылин

26 марта 2002 г.



*Теория устойчивости*

*Качественная теория*

*Уравнения в частных...*

*Предметный указатель*

*Литература*

*Веб – страница*

*Титульный лист*



*Страница 1 из 47*

*Назад*

*Полный экран*

*Закреть*

*Выход*



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 2 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход

# 1. Теория устойчивости

## 1.1. Основные понятия

В общем случае трудно получить количественную информацию в отношении решений нелинейных дифференциальных уравнений. Во многих физических задачах независимая переменная  $x$  играет роль времени, а зависимая переменная  $y$  определяет состояние системы. Часто нет необходимости знать решение явно, а достаточно получить информацию о поведении решения при больших временах. Во многих физических задачах имеются основания считать, что малые изменения в условиях задачи ведут к малым изменениям в решении.

Например, рассмотрим линейное уравнение

$$y' = Ay + b(x), \quad (1.1)$$

где  $A$  — постоянная матрица. Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — два решения уравнения (1.1), отвечающие различным начальным условиям. Положим

$$z = y_2 - y_1,$$

тогда

$$z' = Az. \quad (1.2)$$

Пусть все собственные числа матрицы  $A$  имеют отрицательную вещественную часть:  $\text{Re} \lambda_i < 0$  ( $\forall i$ ). Согласно общей теории решение  $z$  является суммой функций

$$x^j e^{\lambda_i x} c_{ij} \quad (j = 0, \dots, k_i - 1) \quad (1.3)$$

где  $k_i$  — кратность собственного значения  $\lambda_i$ , а  $c_{ij}$  — постоянные векторы. Но тогда

$$z \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \mathbf{0}.$$

В этом случае говорят, что решения уравнения (1.1) *устойчивы*. Если хотя бы одно из собственных значений имеет  $\lambda_i$  имеет положительную вещественную часть, общее



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 3 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

решение уравнения (1.2) становится неограниченно большим при  $x \rightarrow \infty$ . В этом случае говорят, что решения уравнения (1.1) *неустойчивы*.

Понятие устойчивости, в действительности, является сложным. Нет единого определения, удовлетворяющего всем целям.

**Определение 1.1.** Решения уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (1.4)$$

называются *устойчивыми по Ляпунову*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \|y_2(x_0) - y_1(x_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|y_2(x) - y_1(x)\| < \varepsilon \quad (\forall x > x_0),$$

где  $y_1$  и  $y_2$  — произвольные решения уравнения (1.4), а  $x_0$  — фиксированная начальная точка.

**Определение 1.2.** Решения уравнения (1.4)

$$y' = f(x, y)$$

называются *асимптотически устойчивыми*, если

$$\exists \delta > 0 : \quad \|y_2(x_0) - y_1(x_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \|y_2(x) - y_1(x)\| = 0,$$

где  $y_1$  и  $y_2$  — произвольные решения уравнения (1.4), а  $x_0$  — начальная точка.

Например, все решения уравнения (1.1) в случае собственных чисел с отрицательной вещественной частью являются асимптотически устойчивыми.

В некоторых случаях концепция устойчивости зависит от начальных условий. Рассмотрим, например, уравнение

$$y' = -y(y - 1)(y - 2). \quad (1.5)$$



Оно имеет следующие частные решения

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 2.$$

Если  $y \neq 0, 1, 2$ , то делением переменных найдем общий интеграл

$$(y - 1)^2 = \frac{1}{1 + c^2 e^{-2x}}.$$

Легко можно исследовать устойчивость решений  $y_1, y_2, y_3$ , см. рис. 1. Решения  $y = 0$  и  $y = 2$  — устойчивы, а  $y = 1$  — нет. Любое решение с начальным значением больше 1 приближается к  $y = 2$ , любое решение с начальным значением меньше 1 приближается к  $y = 0$ . Если начальное значение равно 1, получаем решение  $y = 1$ .

**Определение 1.3.** Решения уравнения (1.4)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

называются *устойчивыми по Ляпунову относительно множества  $\Omega$  начальных условий*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \begin{cases} \|\mathbf{y}_2(x_0) - \mathbf{y}_1(x_0)\| < \delta, \\ \mathbf{y}_1(x_0), \mathbf{y}_2(x_0) \in \Omega \end{cases} \Rightarrow \|\mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_1(x)\| < \varepsilon \quad (\forall x > x_0),$$

где  $\mathbf{y}_1$  и  $\mathbf{y}_2$  — произвольные решения уравнения (1.4), а  $x_0$  — фиксированная начальная точка.

Аналогичное определение дается в отношении асимптотической устойчивости.

**Упражнение 1.4.** Сформулировать определение асимптотической устойчивости решений уравнения (1.4) в отношении множества  $\Omega$  начальных условий.

Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



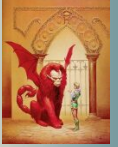
Страница 4 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 5 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход

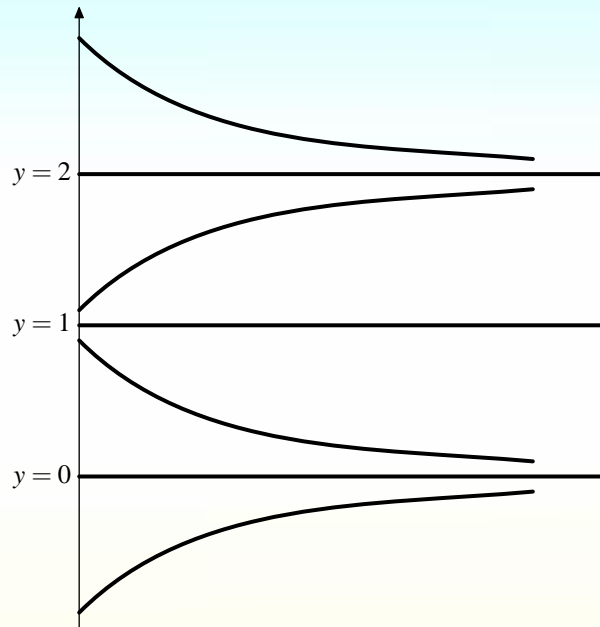


Рис. 1: Решения уравнения  $y' = -y(y - 1)(y - 2)$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 6 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

В отношении примера (1.5) решение  $\mathbf{y} = 0$  является асимптотически устойчивым для начальных условий  $\mathbf{y}(0) < 1$ , решение  $\mathbf{y} = 2$  является асимптотически устойчивым для начальных условий  $\mathbf{y}(0) > 1$ .

Если речь идет об устойчивости частного решения, обычно имеется ввиду устойчивость решений относительно начальных данных, лежащих в достаточно малой окрестности начального условия рассматриваемого частного решения.

Решения системы

$$\mathbf{y}' = J\mathbf{y}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

не являются асимптотически устойчивыми, поскольку собственные значения матрицы  $J$  равны  $\pm i$  (вещественная часть не является отрицательной). Однако решения этого уравнения являются устойчивыми по Ляпунову. Действительно, положим

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{b} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{y}(x) = e^{Jx}\mathbf{y}(0) = (\cos x \cdot I + \sin x \cdot J)\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} b_1 \cos x + b_2 \sin x \\ b_2 \cos x - b_1 \sin x \end{pmatrix}.$$

Если определит норму вектора равенством

$$\|\mathbf{b}\| = \max\{|b_1|, |b_2|\},$$

то

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leq 2\|\mathbf{y}(0)\|.$$

Поэтому, обращаясь к проверке устойчивости по Ляпунову, фиксируя  $\varepsilon > 0$ , достаточно выбрать  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ .

В случае линейных дифференциальных систем уравнений (1.1) с постоянными коэффициентами вопросы устойчивости сводятся к изучению корней характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (1.7)$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 7 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход

Последняя задача, сама по себе, может быть чрезвычайно сложной, однако эти трудности лежат в области специальных вопросов алгебры, см., например, критерий Рауса–Гурвица в [3]. Мы не будем касаться этой темы.

Вопросы устойчивости в линейном случае, но с переменными коэффициентами, а тем более, в нелинейном случае, могут быть несравненно более трудными. Однако, во многих случаях можно достаточно много сказать о характере решений. Примером такого положения является следующая теорема.

**Теорема 1.5.** *Решения задачи Коши*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{b} \end{cases} \quad (1.8)$$

*являются асимптотически устойчивыми, если все собственные числа матрицы  $A$  имеют отрицательную вещественную часть, а функция  $\mathbf{f}$  непрерывна и удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\| \leq k\|\mathbf{y}\|, \quad (1.9)$$

*где  $k$  — достаточно мало (и зависит от  $A$ ). Например, считая, что*

$$\|e^{Ax}\| \leq ce^{-\alpha x}, \quad (1.10)$$

*достаточно требовать, чтобы*

$$ck < \alpha. \quad (1.11)$$

*Доказательство.* Положим (в духе метода вариации постоянных)

$$\mathbf{y} = e^{Ax} \mathbf{z},$$

тогда

$$\mathbf{y}' = Ae^{Ax} \mathbf{z} + e^{Ax} \mathbf{z}',$$



откуда получаем уравнение на  $z$ :

$$\begin{cases} z' = e^{-Ax} f(x, e^{Ax} z), \\ z(0) = b. \end{cases}$$

Интегрируя и умножая на  $e^{Ax}$ , найдем

$$y(x) = e^{Ax} b + \int_0^x e^{A(x-t)} f(t, y(t)) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|y(x)\| &\leq \|e^{Ax}\| \cdot \|b\| + \int_0^x \|e^{A(x-t)}\| \cdot \|f(t, y(t))\| dt \\ &\leq c \|b\| e^{-\alpha x} + \int_0^x c e^{-\alpha(x-t)k} \|y(t)\| dt \quad (x > 0), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{ke^{\alpha x} \|y(x)\|}{\|b\| + k \int_0^x e^{\alpha t} \|y(t)\| dt} \leq ck$$

и, после интегрирования в пределах от 0 до  $x$ ,

$$\ln \frac{\|b\| + k \int_0^x e^{\alpha t} \|y(t)\| dt}{\|b\|} \leq ckx,$$

т.е.

$$\|b\| + k \int_0^x e^{\alpha t} \|y(t)\| dt \leq \|b\| e^{ckx},$$

Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист

⏪ ⏩

◀ ▶

Страница 8 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход





что ведет к конечной оценке

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leq c\|\mathbf{b}\|e^{(ck-\alpha)x}.$$

Если  $ck - \alpha < 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{y}(x) = \mathbf{0}$ . □

**Следствие 1.6.** *Решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = (A + B(x))\mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{b} \end{cases} \quad (1.12)$$

являются асимптотически устойчивыми, если все собственные числа матрицы  $A$  имеют отрицательную вещественную часть, а функция  $B(x)$  непрерывна и удовлетворяет оценке

$$\|B(x)\| \leq k, \quad (1.13)$$

где  $k$  — достаточно мало.

**Следствие 1.7.** Пусть  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  является решением автономной<sup>1</sup> системы

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Если функция  $\mathbf{f}$  дифференцируема в нуле, то решение  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  является асимптотически устойчивым, если вещественные части всех собственных чисел матрицы Якоби  $\mathbf{f}'(\mathbf{0})$  отрицательны.

*Доказательство.* Достаточно заметить, что в силу дифференцируемости  $\mathbf{f}$  и равенства  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  имеем

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}'(\mathbf{0})\mathbf{y} + \mathbf{r}(\mathbf{y}), \quad \|\mathbf{r}(\mathbf{y})\| \underset{\|\mathbf{y}\| \rightarrow 0}{=} o(\|\mathbf{y}\|).$$

□

---

<sup>1</sup>т.е. нет явной зависимости от  $x$

Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 9 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 10 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

## 1.2. Прямой метод Ляпунова

Речь пойдет об одном методе исследования на устойчивость, который может быть интерпретирован с чисто физических позиций. Полная энергия физической системы в состоянии устойчивого равновесия должна иметь минимум. Например, полная энергия частицы массы  $m$ , совершающей упругие колебания с коэффициентом упругости  $k$  вдоль оси  $x$  около нуля равна

$$E = \frac{mx'^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Дифференциальное уравнение движения такой частицы имеет вид

$$mx'' + cx' + kx = 0,$$

где член  $cx'$  представляет сопротивление движению, вызванное трением, при этом  $c > 0$ . Дифференцируя  $E$  и используя уравнение движения, найдем

$$E' = mx'x'' + kxx' = x'(mx'' + kx) = -cx'^2 \leq 0.$$

Это означает, что энергия убывает с течением времени. Но энергия является ограниченной с низу (не отрицательной), следовательно, существует точная нижняя грань значений  $E$ , равная в данном случае нулю, что достигается, когда система останавливается в положении  $x = 0$ . Это означает, что решение  $x = 0$  является асимптотически устойчивым.

Идея метода Ляпунова в отношении уравнения

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad (1.14)$$

— найти функцию  $V(x, \mathbf{y})$ , которая ведет себя как энергия системы.

**Определение 1.8.** Функция  $V(x, \mathbf{y})$  называется *положительно определенной относительно  $\mathbf{y}$* , если

1.  $V$  — непрерывна,

$$2. \lim_{\|\mathbf{y}\| \rightarrow 0} V(x, \mathbf{y}) = 0,$$

3. существует непрерывная монотонно возрастающая функция  $\varphi$ , такая, что  $\varphi(0) = 0$  и

$$V(x, \mathbf{y}) \geq \varphi(\|\mathbf{y}\|).$$

Функция  $V$  называется *отрицательно определенной*, если функция  $-V$  является положительно определенной.

**Теорема 1.9.** Пусть в уравнении

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

функция  $\mathbf{f}$  непрерывна и

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Решение  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  является устойчивым по Ляпунову, если существует положительно определенная (относительно  $\mathbf{y}$ ) функция  $V(x, \mathbf{y})$ , производная которой неположительна на всех интегральных кривых, начальные условия для которых достаточно близки к нулю:

$$V' \equiv \frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i} \cdot f_i(x, \mathbf{y}) \leq 0.$$

Здесь  $f_i$  — компоненты вектора  $\mathbf{f}$ .

*Доказательство.* Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{b}$  так, чтобы  $\|\mathbf{b}\| < \varepsilon$  и

$$V(0, \mathbf{b}) < \varphi(\varepsilon).$$

Предположим, что при некотором  $x$  решение  $\mathbf{y}$  с начальным условием  $\mathbf{b}$  станет по норме равным  $\varepsilon$ . Тогда

$$V(x, \mathbf{y}(x)) \geq \varphi(\varepsilon).$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 11 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист

⏪ ⏩

◀ ▶

Страница 12 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

Но по предположению  $V$  на траекториях решений является невозрастающей функцией, так что имеем также

$$V(x, \mathbf{y}(x)) \leq V(0, \mathbf{b}) < \varphi(\varepsilon).$$

Полученное противоречие означает, что решение  $\mathbf{y}$  при всех  $x$  остается по норме меньше  $\varepsilon$ .  $\square$

**Теорема 1.10.** Пусть в условиях теоремы 1.9 производная  $V'$  является отрицательно определенной. Тогда решение  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  является асимптотически устойчивым.

*Доказательство.* По условиям теоремы имеют место неравенства

$$V(x, \mathbf{y}) > \varphi(\|\mathbf{y}\|), \quad V'(x, \mathbf{y}) < -\psi(\|\mathbf{y}\|),$$

где функции  $\varphi$  и  $\psi$  непрерывны, возрастают и в нуле равны нулю. Если асимптотической устойчивости нулевого решения нет, то в силу устойчивости нулевого решения по Ляпунову должна существовать положительная константа  $\rho$  такая, что имеет место неравенство

$$\|\mathbf{y}(x)\| \geq \rho > 0.$$

Тогда

$$V(x, \mathbf{y}(x)) > \varphi(\rho) > 0, \quad V'(x, \mathbf{y}(x)) < -\psi(\rho) < 0.$$

Но интегрирование второго неравенства ведет к оценке

$$V(x, \mathbf{y}(x)) \leq V(0, \mathbf{y}(0)) - x\psi(\rho)$$

и, следовательно, при достаточно больших  $x$  функция  $V$  становится отрицательной, противоречие.  $\square$

Слабость метода Ляпунова состоит в том, что нет общей техники построения функции  $V$  – функции Ляпунова.



Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -f(x),$$

считая, что  $f(0) = 0$  и  $f(x) > 0$  при  $x \neq 0$ . Заметим, что

$$y \cdot \frac{dy}{dt} = -f(x) \cdot \frac{dx}{dt},$$

откуда

$$\frac{y^2}{2} + \int_0^x f(u) du = C$$

— первый интеграл. Функция

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(u) du$$

является положительно определенной. Ее производная на траекториях системы равна

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot y + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot (-f(x)) = f(x)y - yf(x) = 0.$$

По теореме 1.9 положение равновесия  $x = 0, y = 0$  устойчиво по Ляпунову. Заметим на будущее, что данная система является *гамильтоновой* и найденная функция  $V$  является *гамильтонианом* этой системы.

Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 13 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 14 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

## 2. Элементарные вопросы качественной теории на плоскости

### 2.1. Автономные системы

Во многих физических задачах  $x$  задает положение некоторой системы,  $x'$  и  $x''$  — соответственно, скорость и ускорение. Закон Ньютона связывает ускорение частицы и силу, действующую на нее. Это ведет к дифференциальному уравнению

$$x'' = f(t, x, x'),$$

где  $t$  — время. Мы ограничимся рассмотрением *автономных* уравнений

$$x'' = f(x, x'). \quad (2.1)$$

Полагая  $x' = v$ , получим систему, эквивалентную (2.1):

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = f(x, v). \end{cases} \quad (2.2)$$

Эта система легко сводится к уравнению первого порядка. Переменные  $x$  и  $v$  зависят обе от  $t$ . Если считать, что эти зависимости являются параметрической записью функции  $v$  от  $x$ , найдем

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(x, v)}{v}. \quad (2.3)$$

Решив дифференциальное уравнение первого порядка (2.3), мы найдем эту функцию  $v = v(x)$ . Тогда зависимость  $x$  от  $t$  может быть найдена интегрированием уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v(x).$$

Решим, например, уравнение

$$x'' + x = 0.$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 15 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

Редукция к системе дает

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -x, \end{cases}$$

и тогда,

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{x}{v},$$

откуда

$$x dx + v dv = 0.$$

Последнее есть уравнение в полных дифференциалах. Его интеграл

$$x^2 + v^2 = c^2, \quad c = \text{const}.$$

Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - x^2},$$

откуда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \int dt,$$

т.е.

$$\arcsin \frac{x}{c} = t + t_0 \quad \text{или} \quad x = c \sin(t + t_0).$$

Если физическая система, представленная системой (2.2), имеет одно или несколько положений равновесия, эти равновесные положения могут быть охарактеризованы как решения системы, для которых  $x$  является константой, т.е. положения равновесия являются решениями уравнения

$$f(x, 0) = 0.$$

В окрестности таких точек уравнение (2.3) становится неопределенным и требуется отдельная техника исследования.



Перейдем к общей постановке задачи. Будем рассматривать автономную систему

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases} \quad (2.4)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $t$ . Считая  $y$  функцией  $x$ , найдем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \quad (2.5)$$

Будем предполагать, что существует неподвижная точка  $(x_0, y_0)$ , т.е. точка, в которой обе функции  $f$  и  $g$  обращаются в ноль одновременно. Не теряя общности будем считать, что  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Этого всегда можно добиться сдвигом системы координат в плоскости  $x, y$ .<sup>2</sup> Функции  $f$  и  $g$  мы будем считать дифференцируемыми в нуле, тогда

$$\begin{cases} f(x, y) = ax + by + \varphi(x, y), & \varphi(x, y) \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{=} o(|x| + |y|), \\ g(x, y) = cx + dy + \psi(x, y), & \psi(x, y) \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{=} o(|x| + |y|) \end{cases} \quad (2.6)$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

является матрицей Якоби вектор-функции  $(f, g)$  в нуле.

Естественно ожидать, что поведение решений уравнений (2.4) и (2.5) похоже на поведение решений уравнений, соответственно,

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (2.7)$$

<sup>2</sup>неподвижных точек может быть много, в данный момент мы будем исследовать какую-либо одну из них

Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 16 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход



и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \quad (2.8)$$

в окрестности нуля (неподвижной точки). Уравнение (2.7) называется *линеаризацией* уравнения (2.4). Исследуем его, записав в виде

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы  $A$  находятся из уравнения

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Предположим, вначале, что собственные числа различны и равны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Соответствующие собственные векторы обозначим через  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ . Обозначая матрицу, столбцами которой являются эти векторы, через  $T$ , найдем

$$A = T\Lambda T^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Замена искомой функции

$$\mathbf{z} = T^{-1}\mathbf{y}$$

ведет к системе

$$\mathbf{z}' = \Lambda\mathbf{z},$$

решения которой имеют вид

$$u = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad v = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Предположим, теперь, что собственные числа вещественны (и различны). Тогда на фазовой плоскости  $u, v$  получим семейство кривых

$$v = ku^\mu, \quad \mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 17 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

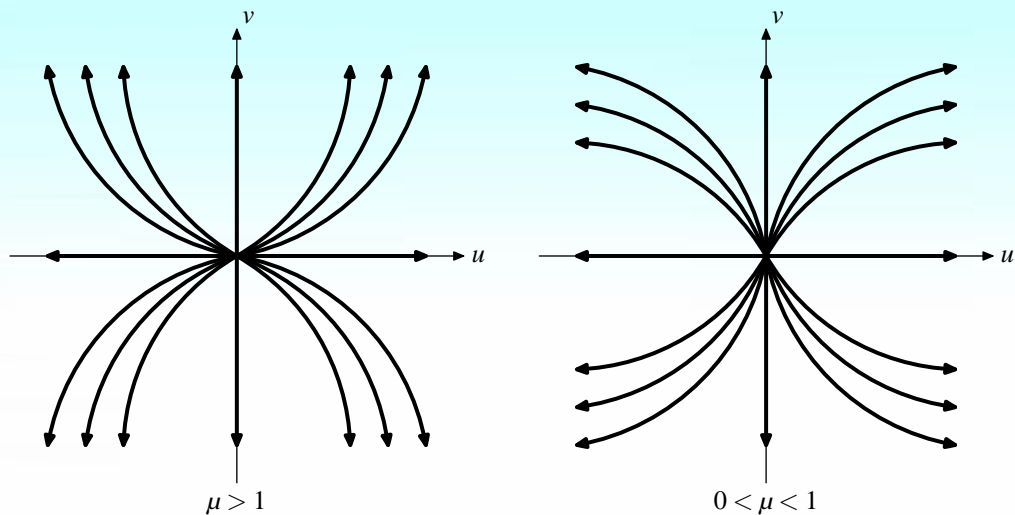


Рис. 2: Неустойчивый узел

Если оба корня  $\lambda_1, \lambda_2$  положительны, получится картина, представленная на рисунке 2. При этом стрелочки указывают направление движения. Особая точка  $(0,0)$  называется *неустойчивым узлом*.

Если оба корня отрицательны, получится аналогичная картина, но направление движения изменится на противоположное. Особая точка  $(0,0)$  в этом случае называется *устойчивым узлом*. Если корни разных знаков, *фазовый портрет* примет вид, например, показанный на рисунке 3.

В этом случае особая точка  $(0,0)$  называется *седлом*. Четыре траектории, входящие или выходящие из седловой точки и отделяющие друг от друга семейства траекторий



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



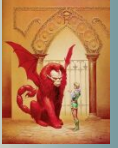
Страница 18 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

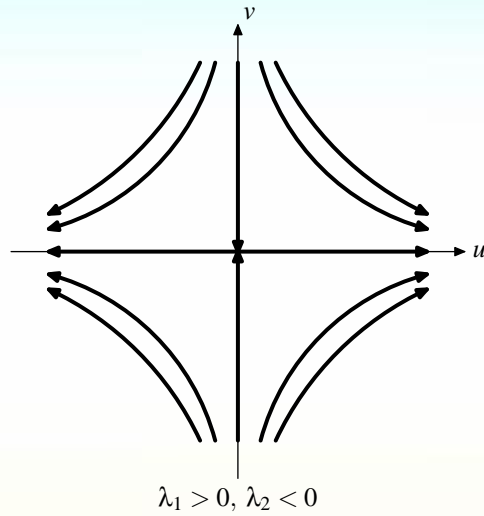


Рис. 3: Седло

Веб – страница

Титульный лист



Страница 19 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 20 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

типа гипербол, называются *сепаратрисами*.

Если корни комплексные, то в силу вещественности матрицы  $A$ , будем иметь комплексно сопряженные корни  $\lambda_{12} = \alpha \pm i\beta$ . Пусть  $\mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$  – соответствующие собственные векторы.<sup>3</sup> Тогда

$$A\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}$$

$$A\mathbf{b} = \beta\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

Это означает, что в базисе из векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  матрица  $A$  примет вид

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

здесь  $S$  – матрица, столбцы которой составляют векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Замена

$$\mathbf{z} = S^{-1}\mathbf{y}$$

приведет нас к уравнению

$$\mathbf{z}' = B\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Удобно ввести полярные координаты

$$\begin{cases} u = r \cos \varphi, \\ v = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Тогда система

$$\begin{cases} u' = \alpha u + \beta v, \\ v' = -\beta u + \alpha v \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – вещественные векторы



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 21 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход

примет вид

$$\begin{cases} r' = \alpha r, \\ \varphi' = -\beta. \end{cases}$$

Решение

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \varphi = -\beta t + \varphi_0,$$

если  $\alpha \neq 0$ , является спиралью, см. рис. 4. Особая точка при этом называется *фокусом*. Закручивается или раскручивается спираль (с течением времени) — определяется знаком вещественной части собственных чисел (т.е. знаком  $\alpha$ ). Если  $\alpha > 0$ , спираль закручивается и фокус называется устойчивым. Направление движения (по или против часовой стрелки) — определяется знаком  $\beta$ .

Если корни чисто мнимые, вместо спиралей получаем семейство окружностей с центром в нуле. Особая точка при этом так и называется — *центром*.

Остается разобрать случай кратного собственного числа  $\lambda$  матрицы  $A$ . Если матрица может быть диагонализирована (т.е. существует базис из собственных векторов), то верны те же рассуждения, которые относились к случаю различных вещественных значений одного знака. В противном случае в жордановом базисе матрица  $A$  примет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

В соответствующих координатах  $u, v$  система запишется в виде

$$\begin{cases} u' = \lambda u + v, \\ v' = \lambda v. \end{cases}$$

Решение дается равенствами

$$\begin{cases} u = (c_1 t + c_2) e^{\lambda t}, \\ v = c_1 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

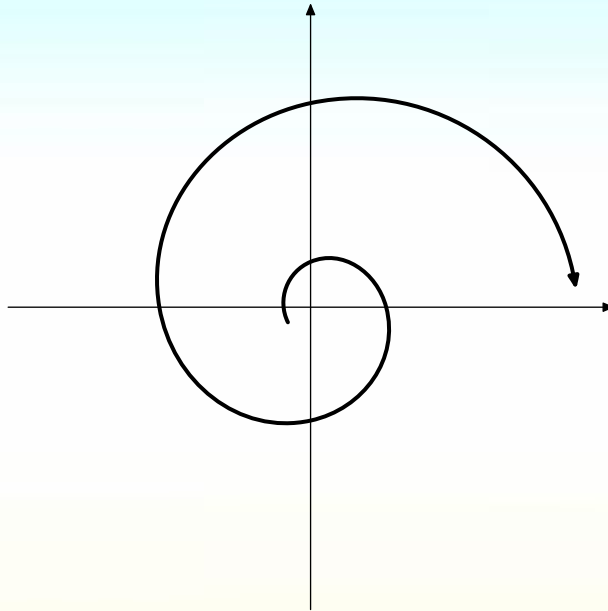
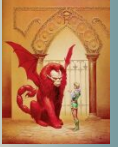


Рис. 4: Фокус

Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 22 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 23 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

Качественно опять фазовые кривые выглядят также, как в случае вещественных различных корней одного знака, т.е. особая точка будет являться устойчивым узлом в случае  $\lambda < 0$  и неустойчивым узлом при  $\lambda > 0$ .

Возвращаясь на фазовую плоскость  $x, y$  мы получим принципиально те же фазовые портреты (с точностью до линейных искажений). Таким образом, на плоскости в случае *простых* (т.е. если определитель соответствующей матрицы не равен нулю) линейных систем дифференциальных уравнений имеется четыре типа особых точек: узел, седло, фокус и центр.

Эта классификация сохранится и для нелинейных систем. Имеет место теорема о линеаризации, утверждающая, что если линеаризованная система в окрестности особой точки является простой, то фазовый портрет нелинейной системы в окрестности рассматриваемой особой точки качественно эквивалентен фазовому портрету линеаризованной системы, если только особая точка не является центром. Доказательство этой теоремы выходит за рамки данного курса. Ограничимся лишь только замечанием, что в силу следствия 1.7 в случае узла или фокуса устойчивость особой точки нелинейной системы будет определяться устойчивостью особой точки соответствующего линеаризованного уравнения: устойчивость особой точки в нуле для уравнения (2.6) определяется устойчивостью особой точки (узла или фокуса) линеаризованного уравнения 2.7.

## 2.2. Понятие о предельном цикле

В предыдущем параграфе мы рассматривали решения автономных систем на плоскости только в окрестности особых точек (имеются в виду, конечно, нелинейные системы). Во многих задачах бывает нужна информация о глобальных решениях. Выяснение глобальных свойств решений является задачей значительно более сложной. Достаточно заметить, что две нелинейные системы могут иметь одинаковое число особых точек одинакового характера (качественно эквивалентных) и одинаково расположенных, но при этом в целом фазовые портреты этих систем не будут качественно эквивалентными. Одним из интересных проявлений глобальных фазовых портретов являются *предельные циклы* — изолированные замкнутые орбиты, т.е. такие замкнутые фазовые траектории, в некото-



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 24 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход

рой окрестности которых нет других замкнутых траекторий. Примером является система, имеющая в полярных координатах вид

$$\begin{cases} r' = 1 - r^2, \\ \varphi' = 1. \end{cases}$$

Предельным циклом является окружность  $r = 1$ .

Имеются глубокие результаты, описывающие условия появления предельных циклов (теория Пуанкаре–Бендиксона). Например, если некоторая компактная область в фазовой плоскости обладает тем свойством, что любая траектория, с началом в этой области, остается в области во все последующие моменты времени и если в этой области нет неподвижных точек, то в рассматриваемой области существует предельный цикл.

Мы остановимся на доказательстве одного простого критерия, гарантирующего отсутствие предельных циклов.

**Теорема 2.1.** Пусть в односвязной области  $D$  фазовой плоскости функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  непрерывно дифференцируемы и сумма

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

знакоопределенна. Тогда в области  $D$  нет замкнутых траекторий системы

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

*Доказательство.* Пусть кривая  $\Gamma$  является замкнутой траекторией для рассматриваемой системы. Тогда на ней

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{f} \quad \Rightarrow \quad gdx - fdy = 0 \quad (x, y \in \Gamma).$$





По формуле Грина

$$\int_{\Gamma} g dx - f dy = - \iint_{D_{\Gamma}} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy,$$

где  $D_{\Gamma}$  — область, ограниченная орбитой  $\Gamma$ . Мы пришли к противоречию, поскольку левая часть равенства равна нулю, в то время как правая знакоопределенна.  $\square$

Например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + f(x)}{bx + g(y)}$$

не имеет предельных циклов, если  $a + b \neq 0$ . Действительно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = a + b.$$

[Теория устойчивости](#)

[Качественная теория](#)

[Уравнения в частных...](#)

[Предметный указатель](#)

[Литература](#)

[Веб – страница](#)

[Титульный лист](#)



[Страница 25 из 47](#)

[Назад](#)

[Полный экран](#)

[Закреть](#)

[Выход](#)



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист

⏪ ⏩

◀ ▶

Страница 26 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

## 3. Уравнения в частных производных 1-го порядка

### 3.1. Вводные замечания

С геометрической точки зрения обыкновенному дифференциальному уравнению отвечает заданное в некотором конфигурационном пространстве поле направлений (т.е. в каждой точке конфигурационного пространства задана прямая) и задача интегрирования сводится к нахождению интегральных кривых, т.е. таких кривых, касательные к которым совпадают с направлениями поля. В случае уравнения в частных производных вместо поля направлений задается поле плоскостей (линейных пространств размерности больше 1), т.е. в каждой точке конфигурационного пространства задается плоскость и задача интегрирования сводится к нахождению интегральной поверхности, т.е. такой поверхности, касательные плоскости к которой совпадают с плоскостями поля. Однако интегрируемые поля плоскостей оказываются исключительным явлением. Уже поле двумерных плоскостей в трехмерном пространстве не интегрируется в общем случае. Например — поле плоскостей  $dz = y dx$  в пространстве с координатами  $x, y, z$ . То есть, не существует функции  $F(x, y, z)$  такой, чтобы уравнение  $F(x, y, z) = 0$  определяло поверхность, в каждой точке  $(x, y, z)$  которой касательная плоскость была бы определена уравнением  $(Z - z) = y(X - x)$  (здесь  $X, Y, Z$  — координаты на плоскости). Действительно, такая функция  $F$  не должна зависеть от  $y$  :  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ , что противоречит равенству  $\frac{\partial F}{\partial x} = y$ . Все это говорит о том, что нет общей теории для дифференциальных уравнений в частных производных. Некоторые уравнения имеют свои теории, другие — нет. Мы познакомимся со случаем, когда есть полная теория — это случай [одного] уравнения в частных производных первого порядка. Для системы линейных дифференциальных уравнений (приведенный выше пример относится к линейной системе) такой теории уже нет.

Уравнение в частных производных первого порядка имеет вид

$$F(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0,$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 27 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

или в координатной записи

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

где  $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$ , где  $u$  — искомая, а  $F$  — заданная функции.

Прежде чем переходить к общей теории рассмотрим примеры.

Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (3.1)$$

очевидно, в качестве общего решения имеет произвольную функцию  $u = u(x_2, \dots, x_n)$ , не зависящую от  $x_1$ . Это пример линейного уравнения в частных производных. Как мы видим, пространство решений этого уравнения является бесконечномерным линейным пространством. Такое положение типично (но не обязательно) для линейных уравнений в частных производных.

Второй пример — уравнение эйконала в геометрической оптике. На плоскости  $x, y$  оно имеет вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1. \quad (3.2)$$

Пусть  $\Omega$  — выпуклая замкнутая область с гладкой границей. Для точки  $(x, y) \notin \Omega$  определим функцию  $u(x, y)$  как расстояние от точки  $(x, y)$  до области  $\Omega$ . Тогда, как нетрудно видеть, функция  $u$  является решением уравнения (3.2). Действительно,  $\nabla u$  является вектором, направленным в сторону наибыстрейшего возрастания функции  $u$ , т.е. от точки  $(x, y)$  перпендикулярно к границе  $\partial\Omega$ . На этом направлении скорость изменения расстояния равна по абсолютной величине единице. Но  $|\nabla u|$  и есть скорость изменения  $u$  на таком направлении (направлении наибыстрейшего изменения), т.е.  $|\nabla u| = 1$ , что эквивалентно равенству (3.2). Можно показать, что любое решение уравнения эйконала локально имеет вид суммы расстояния до некоторой кривой и константы.

В качестве еще одного примера рассмотрим уравнение Эйлера–Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 28 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

Как и предыдущее — это нелинейное уравнение, однако тот факт, что частные производные входят в уравнение линейно выделяет его в отдельную группу *квазилинейных* уравнений. Это уравнение описывает свободное движение частицы вдоль прямой  $x$ . Действительно, если  $u(x, t)$  — скорость частицы в точке  $x$  в момент времени  $t$ , то  $x = x_0 + u(x, t)t$ , согласно второму закону Ньютона, удовлетворяет уравнению  $x'' = 0$ . При этом  $x' = u(x, t)$ , откуда согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$x'' = u_t + u_x \cdot x' = u_t + uu_x = 0.$$

Обратно, из уравнения Эйлера–Хопфа можно вывести уравнение Ньютона, т.е. эти описания движения эквивалентны. Заметим, что уравнение Ньютона является уравнением эволюции частиц, в то время как уравнение Эйлера–Хопфа является уравнением поля (уравнением для волн). Здесь мы имеем наглядный пример двойственности описания одних и тех же физических явлений — при помощи волн и при помощи частиц. **Оказывается эта двойственность в некотором смысле универсальна, т.е. если поле удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных первого порядка, то его изучение может быть сведено к изучению эволюции частиц, движение которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.**

### 3.2. Линейные уравнения в частных производных

Пусть  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  — векторное поле в области евклидова пространства. Уравнение

$$D_{\mathbf{v}}u = 0 \tag{3.4}$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных. Напомним, что  $D_{\mathbf{v}}u$  — производная от  $u$  по вектору  $\mathbf{v}$ , т.е.

$$D_{\mathbf{v}}u(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{x} + t\mathbf{v}(\mathbf{x})) - u(\mathbf{x})}{t} = \sum_{i=1}^n v_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

где  $v_i$  и  $x_i$  — координаты векторов, соответственно,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{x}$ .



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист

⏪ ⏩

◀ ▶

Страница 29 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

**Определение 3.1.** Векторное поле  $\mathbf{v}$  называется *характеристическим* векторным полем, а его фазовые кривые — *характеристиками* уравнения (3.4).

Напомним, что фазовые кривые — это проекции интегральных кривых дифференциального уравнения

$$\mathbf{x}' = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

на фазовое пространство (пространство  $\mathbf{x}$ -ов). Здесь штрих ' означает производную по независимой переменной  $t$ .

**Определение 3.2.** *Первыми интегралами* системы (3.5) называются дифференцируемые функции  $U(\mathbf{x})$ , которые постоянны на фазовых кривых поля  $\mathbf{v}$ , т.е.

$$\frac{d}{dt} U(\mathbf{x}(t)) = 0, \quad (3.6)$$

если  $\mathbf{x}(t)$  — решение уравнения (3.5).

Очевидно, что первые интегралы системы (3.5) и только они являются решениями линейного однородного уравнения в частных производных (3.4). Действительно, на фазовых траекториях

$$\frac{d}{dt} U(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot v_i = 0.$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Характеристическим является поле  $\mathbf{v} = \mathbf{x}$ . Решая уравнение  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$  найдем  $\mathbf{x} = e^t \mathbf{c}$ . Таким образом, характеристики — лучи  $\mathbf{x} = e^t \mathbf{c}$  (здесь множитель  $e^t$  играет роль параметра: при изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  точка  $\mathbf{x}$  пробегает луч, исходящий из начала



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 30 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

координат в направлении вектора  $\mathbf{c}$ ). Решение  $u(\mathbf{x})$  должно быть постоянно на каждом таком луче. Считая, что функция  $u(\mathbf{x})$  непрерывна в нуле заключаем, что решениями рассматриваемого уравнения в частных производных являются только константы.

В качестве еще одного примера рассмотрим уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \{H, \Phi\} = 0, \quad (3.7)$$

где  $H = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  – функция Гамильтона (функция полной энергии системы),  $\Phi = \Phi(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  – искомая функция,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  – так называемые обобщенные координаты и импульсы,  $t$  – время, а  $\{H, \Phi\}$  – скобка Пуассона. Последняя определяется равенством

$$\{H, \Phi\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \right). \quad (3.8)$$

Уравнение Лиувилля является линейным однородным уравнением в частных производных с характеристическим векторным полем

$$\mathbf{v} = \left( 1, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) = \left( 1, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right).$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}},$$

т.е.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \end{cases} \quad (3.9)$$

и называются каноническими уравнениями Гамильтона. Решение  $\Phi$  уравнения Лиувилля является постоянным на траекториях канонических уравнений.



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 31 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

**Определение 3.3.** Задачей Коши для уравнения (3.4) называется задача о нахождении решения  $u$  этого уравнения, удовлетворяющая условию

$$u|_{\Gamma} = f, \quad (3.10)$$

где  $\Gamma$  — заданная гладкая гиперповерхность, а  $f$  — определенная на ней функция. Гиперповерхность  $\Gamma$  называется *начальной*.

**Определение 3.4.** Точка  $x_0$  начальной гиперповерхности  $\Gamma$  называется *нехарактеристической*, если характеристика, проходящая через эту точку, *трансверсальна* (т.е. — не касательна) поверхности  $\Gamma$ .

**Теорема 3.5.** Пусть  $x_0$  — нехарактеристическая точка поверхности  $\Gamma$ . Тогда в некоторой окрестности этой точки существует и единственно решение  $u$  задачи Коши для уравнения (3.4) с начальной гиперповерхностью  $\Gamma$ .

*Доказательство.* Пусть в окрестности точки  $x_0$  поверхность  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$  задана параметрическим уравнением  $x = \gamma(s)$ , где  $s \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Обозначая параметр на интегральных кривых характеристического поля через  $t$ , введем криволинейные координаты  $(t, s)$  в окрестности точки  $x_0$ . Для фиксированной точки  $x$  они определяются следующим образом. Через каждую начальную точку  $\gamma(s) \in \Gamma$  проходит и при том только одна (локально) интегральная кривая  $x(t; s)$  уравнения (3.5). Тогда точка  $x$  получается как значение решения  $x(t)$  задачи Коши для уравнения (3.5) с начальным условием  $x(0) = \gamma(s)$ . Таким образом, точка  $x$  взаимно однозначно определяется парой  $(t, s)$ . Единственный тонкий вопрос состоит в том, а любая ли точка  $x$  (в достаточно малой окрестности рассматриваемой нехарактеристической точки) получит координаты  $(t, s)$ , т.е. обязательно ли, выйдя из точки  $x$  по характеристике, мы достигнем поверхности  $\Gamma$ . Ответ будет положительным в силу теоремы о продолжимости решения обыкновенного дифференциального уравнения и нехарактеристичности поверхности  $\Gamma$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ .<sup>4</sup> В новых

<sup>4</sup>мы не будем более строго обосновывать этот факт апеллируя к геометрической интуиции



координатах задача Коши для уравнения в частных производных принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \\ w|_{t=0} = f(\gamma(\mathbf{s})), \end{cases} \quad (3.11)$$

где  $w(t, \mathbf{s}) = u(\mathbf{x})$ .

Эта процедура называется *выпрямлением* векторного поля  $\mathbf{v}$  и поверхности  $\Gamma$ . Отметим, что дифференциальное уравнение выпрямленного поля в точности отвечает тому факту, что решение исходного уравнения в частных производных должно быть первым интегралом дифференциального уравнения характеристического векторного поля. Решение полученной задачи элементарно и единственно

$$w(t, \mathbf{s}) = f(\gamma(\mathbf{s})).$$

В исходных координатах решение  $u(\mathbf{x})$  строится как постоянное на характеристиках с начальными значениями  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .  $\square$

Аналогично рассматривается неоднородное линейное уравнение в частных производных

$$D_{\mathbf{v}}u = b, \quad (3.12)$$

где  $b = b(\mathbf{x})$  — заданная функция.

**Теорема 3.6.** *Задача Коши для уравнения (3.12) в достаточно малой окрестности любой нехарактеристической точки начальной гиперповерхности  $\Gamma$  имеет и при том единственное решение. В случае начального условия (3.10) оно дается равенством*

$$u(\mathbf{x}(t)) = f(\mathbf{x}(0)) + \int_0^t b(\mathbf{x}(\tau)) d\tau,$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — характеристика,  $\mathbf{x}(0) \in \Gamma$ .

Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист

⏪ ⏩

◀ ▶

Страница 32 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход





Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 33 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход

*Доказательство.* После выпрямления векторного поля и гиперповерхности приходим к задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = b(\mathbf{x}(t; \mathbf{s})), \\ w|_{t=0} = f(\gamma(\mathbf{s})), \end{cases}$$

решение которой дается равенством

$$w(t, \mathbf{s}) - f(\gamma(\mathbf{s})) = \int_0^t b(\mathbf{x}(\tau; \mathbf{s})) d\tau.$$

Как и ранее здесь  $w(t, \mathbf{s}) = u(\mathbf{x})$  при замене переменных  $\mathbf{x} \mapsto (t, \mathbf{s})$ . □

Заметим, что в случае неоднородного уравнения решение уже не является постоянным на характеристиках. Как и в случае обыкновенных уравнений общее решение неоднородной задачи является суммой общего решения однородной задачи и частного решения неоднородной.

Найдем решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = y, \quad u(0, y) = \sin y.$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = -y.$$

Таким образом, характеристиками служат кривые

$$x = x_0 + t, \quad y = y_0 e^{-t} \quad \text{т.е.} \quad y = c e^{-x}.$$

Отметим, что общее решение  $U$  однородного уравнения дается равенством

$$U = \Phi(y e^x),$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 34 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход

где  $\Phi$  — произвольная дифференцируемая функция. Найдем решение нашей неоднородной задачи. При  $t = 0$  получаем уравнения на начальные данные  $x_0 = 0$ ,  $u(0, y_0) = \sin y_0$ . Тогда при  $x = t$ ,  $y = y_0 e^{-t}$  найдем

$$u(x, y) = \sin y_0 + \int_0^t y_0 e^{-\tau} d\tau = \sin y_0 - y_0 e^{-t} + y_0,$$

т.е.

$$u(x, y) = \sin(ye^x) + ye^x - y.$$

### 3.3. Квазилинейные уравнения первого порядка

**Определение 3.7.** Квазилинейным уравнением первого порядка называется уравнение

$$D_{\mathbf{v}} u = b, \quad (3.13)$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$  и  $b = b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ , функции  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, u)$  и  $b(\mathbf{x}, u)$  (как функции  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , соответственно) заданы, а функция  $u = u(\mathbf{x})$  (как функция  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) является искомой.

В координатной записи квазилинейное уравнение принимает вид

$$\sum_{i=1}^n v_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, \dots, x_n, u).$$

Смысл выписанного соотношения в следующем. Если точка  $\mathbf{x}$  выходит из точки  $\mathbf{x}_0$  и начинает двигаться со скоростью  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, u(\mathbf{x}_0))$ , то значение решения  $u = u(\mathbf{x}_0)$  начинает меняться со скоростью  $b(\mathbf{x}_0, u(\mathbf{x}_0))$ . Это в точности означает, что вектор

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v}, b) \in \mathbf{R}^{n+1} \quad (3.14)$$

является касательным к графику решения  $u = u(\mathbf{x})$ .



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 35 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

**Определение 3.8.** Векторное поле  $\mathbf{a} = (\mathbf{v}, b)$  называется *характеристическим* для квазилинейного уравнения (3.13). Его фазовые кривые называются *характеристиками* уравнения квазилинейного уравнения.

Таким образом, уравнения на характеристики в случае квазилинейных уравнений имеют вид

$$\mathbf{x}' = \mathbf{v}(\mathbf{x}, u), \quad u' = b(\mathbf{x}, u), \quad (3.15)$$

штрих означает дифференцирование по независимой переменной  $t$ . Уравнения на характеристики часто записывают в симметричном виде:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \dots = \frac{dx_n}{v_n} = \frac{du}{b}.$$

**Теорема 3.9.** *Функция  $u$  является решением квазилинейного уравнения тогда и только тогда, когда ее график состоит из характеристик.*

*Доказательство.* Если характеристика пересекает график решения, то в силу условия касания графика решения с характеристическим полем она вся лежит на этом графике.  $\square$

Задача Коши в квазилинейном случае ставится также, как в линейном.

**Определение 3.10.** *Начальным многообразием  $G$  для задачи Коши в квазилинейном случае называется график функции  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , см. (3.10). Начальное условие  $(\Gamma, f)$  называется *нехарактеристическим в точке  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$* , если вектор  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, u_0)$ , где  $u_0 = f(\mathbf{x}_0)$ , трансверсален поверхности  $\Gamma$ .*

Заметим, что в отличие от линейного уравнения характеристический вектор зависит от  $u$  и, следовательно, нельзя ввести понятия нехарактеристической точки поверхности  $\Gamma$ . Следует говорить лишь о нехарактеристических точках начального многообразия  $G$ .<sup>5</sup>Заметим, что нехарактеристичность начального условия складывается из двух вещей:

<sup>5</sup>если начальное условие  $f$  нехарактеристично в точке  $\mathbf{x}_0$ , то точка  $(\mathbf{x}_0, u_0) \in G$  является нехарактеристической, т.е. характеристическое поле  $\mathbf{a}$  трансверсально  $G$  в этой точке



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист

⏪ ⏩

◀ ▶

Страница 36 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

нехарактеристичности точки  $(x_0, u_0)$  начального многообразия  $G$  и условия невертикальности характеристического поля  $\mathbf{a} = (v, b)$  в этой точке (т.е.  $v \neq 0$ ).

**Теорема 3.11.** *Решение задачи Коши с нехарактеристическим начальным условием в точке  $x_0 \in \Gamma$  существует в некоторой окрестности этой точки и единственно.*

*Доказательство.* В силу нехарактеристичности начального условия в окрестности точки  $(x_0, u_0)$  характеристическое поле  $\mathbf{a}$  невертикально. Поэтому характеристики поля, выходящие из начального многообразия  $G$ , будут выстилать некоторую поверхность, являющуюся графиком функции. Последняя и есть искомое решение. Существование и единственность вытекают из теоремы существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений для характеристик), см. рис. 5.  $\square$

Вернемся к уравнению Эйлера-Хопфа и рассмотрим для него задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x).$$

Уравнения на характеристики имеют вид

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = u, \quad \frac{du}{d\tau} = 0$$

Это линейная система дифференциальных уравнений эквивалентная уравнению Ньютона

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Характеристиками служат прямые

$$t = \tau + t_0, \quad x = u_0\tau + x_0, \quad u = u_0$$

Начальная гиперповерхность  $\Gamma$  является плоскостью  $t = 0$ . Считая, что характеристики начинаются при нулевом значении параметра  $\tau$ , найдем  $t_0 = 0$ . Из начальных условий находим тогда

$$u_0 = f(x_0).$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 37 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

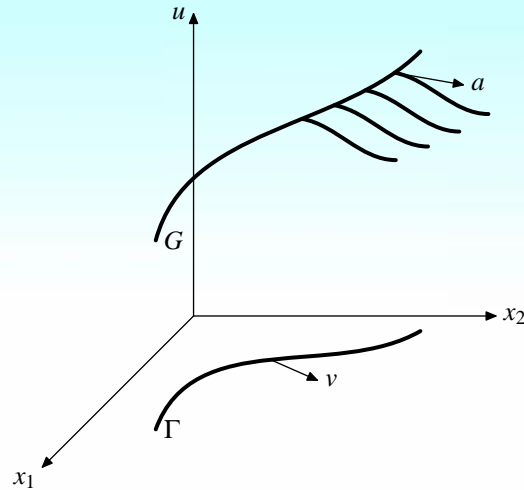


Рис. 5: Характеристики квазилинейного уравнения

Таким образом, получено решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = f(x_0)t + x_0, \\ u = f(x_0) \end{cases}$$

(параметром является  $x_0$ ). В неявном виде решение принимает форму

$$u = f(x - ut).$$

Заметим, что на характеристиках

$$x_0 - u_0 t_0 = x - u_0(t - t_0) - u_0 t_0 = x - u_0 t = x - ut,$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 38 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

что также ведет к решению рассматриваемой задачи Коши.

Это уравнение описывает, например, пылевое облако, частицы которого движутся параллельно оси  $x$  со скоростью  $u$ . Найдем условия опрокидывания пылевой волны, т.е. когда и где производная по  $x$  от скорости обращается в бесконечность (это момент, когда быстрые частицы догоняют медленные и фронт волны рушится — происходит формирование ударной волны, см. рис. 6).

По правилу дифференцирования неявной функции получаем

$$u_x = f'(x - ut) \cdot (1 - tu_x) \quad \Rightarrow \quad u_x = \frac{1}{t + \frac{1}{f'}} ,$$

т.е. формирование ударной волны будет происходить при условии  $tf'(x - ut) = -1$ . Пусть, для определенности,  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg x$ . Условие опрокидывания примет вид:  $t = 1 + (x - ut)^2$ . Мы видим, что опрокидывание наступает при  $t \uparrow 1$  в точке  $x = u$ , т.е. при  $x = f(0) = \frac{\pi}{2}$ .

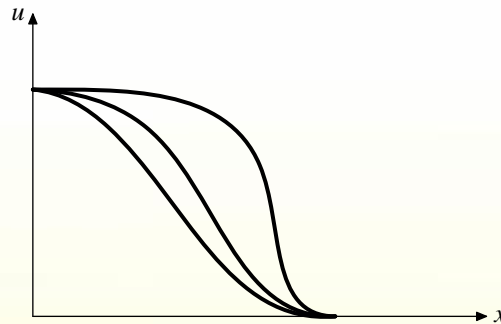


Рис. 6: Формирование ударной волны



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист

⏪ ⏩

◀ ▶

Страница 39 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

### 3.4. Нелинейные уравнения первого порядка

Для нелинейного уравнения в частных производных сохраняет силу метод характеристик, но в то время как характеристики линейного уравнения были траекториями в  $n$ -мерном пространстве, а характеристики квазилинейного уравнения — в  $(n + 1)$ -мерном, характеристики нелинейного уравнения лежат в  $2n + 1$  мерном пространстве (имеется ввиду случай  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ).

Итак, рассмотрим уравнение

$$F(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0, \quad (3.16)$$

где  $F$  — гладкая функция. Прежде всего заметим, что решение этого уравнения сводится к решению системы

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial u} du + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i &= 0, \\ du - \sum_{i=1}^n p_i dx_i &= 0, \end{aligned}$$

или в сокращенной записи

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} = 0, \quad (3.17)$$

$$du - \mathbf{p} d\mathbf{x} = 0. \quad (3.18)$$

Уравнение (3.17) определяет касательную гиперплоскость к гиперповерхности в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ :

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 0, \quad (\mathbf{x}, u, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Уравнение (3.18) задает так называемую *контактную гиперплоскость*. Как уже было замечено выше, поле контактных гиперплоскостей неинтегрируемо, т.е. система (3.17)-(3.18) определяет поле плоскостей размерности  $2n - 1$ . Рассмотрим какую-либо из



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист

⏪ ⏩

◀ ▶

Страница 40 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

плоскостей этого поля как гиперплоскость в пространстве соответствующей контактной плоскости (размерности  $2n$ ). В качестве координат на контактной плоскости можно выбрать  $(d\mathbf{x}, d\mathbf{p})$ <sup>6</sup> (поскольку контактная плоскость взаимно однозначно проектируется на  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$ ).

Дифференциальная форма  $\alpha = du - \mathbf{p} d\mathbf{x}$  называется *стандартной контактной формой*. Ее дифференциал равен

$$\omega = d\alpha = - \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx_i,$$

т.е. является *симплектической формой* в пространстве  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_p^n$  (и, в частности, на контактной плоскости). Как мы знаем, это невырожденная кососимметрическая билинейная форма. Четномерное пространство, наделенное симплектической формой называется *симплектическим* (на подобии того как линейное пространство со скалярным произведением называется евклидовым). Векторы  $\xi$  и  $\eta$  в симплектическом пространстве с формой  $\omega$  называются *косоортогональными*, если

$$\omega(\xi, \eta) = 0.$$

**Теорема 3.12.** *Гиперплоскость в симплектическом пространстве имеет одномерное косоортогональное дополнение, которое лежит в этой гиперплоскости.*

*Доказательство.* Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_{2n}$  — базис в симплектическом пространстве, причем первые  $2n - 1$  векторов составляют базис в гиперплоскости. Тогда вектор  $\eta = \sum_{i=1}^{2n} y_i \xi_i$  будет косоортогонален рассматриваемой гиперплоскости, если  $\omega(\xi_i, \eta) = 0$  при  $i = 1, \dots, 2n - 1$ :

$$\sum_{j=1}^{2n} y_j \omega(\xi_i, \xi_j) = 0 \quad (i = 1, \dots, 2n - 1).$$

<sup>6</sup>точнее — соответствующие проекции вектора





Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 41 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

Это однородная система линейных уравнений на  $2n$  неизвестных  $y_1, \dots, y_{2n}$ . Ранг системы равен  $2n - 1$  (число уравнений) в силу невырожденности симплектической формы. Как известно из курса линейной алгебры, система имеет однопараметрическое семейство решений, т.е. косоортогональное дополнение к гиперплоскости существует и является прямой. Тот факт, что направляющий вектор этой прямой лежит в косоортогональной гиперплоскости тривиален: иначе векторы  $\xi_1, \dots, \xi_{2n-1}, \eta$  образовывали бы базис в симплектическом пространстве, причем  $\omega(\eta, \xi) = 0$  для любого  $\xi$  (в силу  $\omega(\eta, \eta) = 0$ ), что противоречит невырожденности формы  $\omega$ .  $\square$

**Определение 3.13.** Направление, косоортогональное к плоскости (3.17)-(3.18) в контактной плоскости (3.18) называется *характеристическим* для нелинейного уравнения в частных производных. Фазовые кривые характеристического векторного поля называются *характеристиками* для нелинейного уравнения в частных производных.

Найдем уравнения на характеристики. Заметим, что если  $\xi = (X, P)$  и  $\eta = (Y, Q)$  — два вектора (здесь  $X, Y, P, Q$  —  $n$ -мерные составляющие векторов) в симплектическом пространстве со стандартной симплектической формой  $\omega = -\sum dp_i \wedge dx_i$ , то

$$\omega(\xi, \eta) = -\sum (P_i Y_i - Q_i X_i) = -PY + QX.$$

Заметим, далее, что уравнение плоскости (3.17)-(3.18) в координатах  $dx, dp$  имеет вид:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial u} \right) dx + \frac{\partial F}{\partial p} dp = 0.$$

Точнее, если  $\xi = (X, P)$  — произвольный вектор, лежащий в этой плоскости, то (ввиду  $dx(\xi) = X, dp(\xi) = P$ )

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial u} \right) X + \frac{\partial F}{\partial p} P = 0.$$

Сравнив полученные уравнения, нетрудно выписать искомый косоортогональный вектор. В координатах контактной плоскости он задается равенствами

$$\eta = (Y, Q), \quad Y = -\frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial u}.$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 42 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

По традиции характеристический вектор берут противоположного направления. Таким образом, характеристическое поле  $\mathbf{a}$  в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  определяется равенством

$$\mathbf{a} = \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}, \mathbf{p} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{p} \frac{\partial F}{\partial u} \right)$$

(здесь средняя компонента вектора найдена из уравнения контактной плоскости) и уравнения на характеристики имеют вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{du}{dt} = \mathbf{p} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{p} \frac{\partial F}{\partial u} \quad (3.19)$$

или в развернутом виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial u}, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Определение 3.14.** *1-струей* или *1-джетом* функции  $u$  в точке  $\mathbf{x}$  называется вектор  $(\mathbf{x}, u, \nabla u)$ .

Уравнение в частных производных 1-го порядка есть не что иное, как неявное задание графиков 1-струй (так называемый *1-график*) решений этого уравнения. К графику 1-струй функции  $u$  можно относиться как к графику вектор-функции  $(u, \nabla u)$ . Заметим, что это  $n$ -мерная поверхность в  $(2n + 1)$ -мерном пространстве.

**Теорема 3.15.** *График 1-струй решения уравнения в частных производных (3.16) выстилается характеристиками.*

*Доказательство.* Пусть  $u = U(\mathbf{x})$  — решение уравнения в частных производных. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial F}{\partial u} \nabla U + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \nabla U}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial F(\mathbf{x}, U, \nabla U)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 43 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

Рассмотрим решение  $\mathbf{x}(t)$  дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial F(\mathbf{x}, U(\mathbf{x}), \nabla U(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{p}}.$$

Тогда в силу

$$\frac{d\nabla U}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \nabla U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \nabla U}{\partial x_i}$$

заключаем, что функция  $\mathbf{p}(t) = \nabla U(\mathbf{x}(t))$  является решением уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{p} \frac{\partial F}{\partial u},$$

т.е. вектор

$$\left( \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}, \frac{dU(\mathbf{x}(t))}{dt}, \frac{d}{dt} \nabla U(\mathbf{x}(t)) \right)$$

является характеристическим. □

Геометрический смысл доказанной теоремы состоит в следующем. Подпространство симплектического пространства называется *изотропным*, если любые два вектора этого подпространства косоортогональны между собой. Примером изотропного пространства является касательная плоскость к графику решения

$$du = \mathbf{p} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{p} = \nabla U.$$

Это вытекает из леммы Пуанкаре (равенство смешанных производных)

$$\sum d\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \sum \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i = 0.$$

Изотропное пространство не может быть размерности большей, чем  $n$  (половина размерности симплектического пространства), поскольку оно содержится в своем косоортогональном дополнении: если  $m$  — размерность изотропного пространства, то  $2n - m \geq m$ .



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист

⏪ ⏩

◀ ▶

Страница 44 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

Пусть  $(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{p}(t))$  — характеристика. Вектор  $(\mathbf{x}'(t), u'(t), \mathbf{p}'(t))$  косоортогонален (как характеристический) векторам, лежащим в касательной плоскости графика решения. Если при этом он не лежит в самой этой плоскости, то линейная оболочка, натянутая на характеристический вектор и касательную плоскость, будет  $(n + 1)$ -мерным изотропным пространством, противоречие.

В качестве примера рассмотрим уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Тогда  $F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2$ . Уравнения на характеристики запишутся в виде

$$x' = 2p, \quad y' = 2q, \quad u' = 2p^2 + 2q^2, \quad p' = 0, \quad q' = 0.$$

При этом  $p^2 + q^2 = 1$ . Находим характеристики

$$x = 2pt + x_0, \quad y = 2qt + y_0, \quad u = 2t + u_0, \quad p = \text{const}, \quad q = \text{const}, \quad p^2 + q^2 = 1.$$

Заметим, что  $u(x_0, y_0) = u_0$ . Пусть  $f(x, y) = \text{const}$  — некоторая гладкая кривая в плоскости  $x, y$ . Зададим на этой кривой значение функции  $u$  полагая  $u = u_0$ . Фиксировав точку  $(x_0, y_0)$  на начальной кривой получим в качестве характеристики прямую в  $\mathbb{R}^5$ . Проекция характеристики на плоскость  $x, y$  также является прямой. Направляющий вектор этой прямой равен  $2(p, q)$ , т.е. пропорционален  $\nabla u = (p, q)$ . Так как начальная кривая является линией уровня функции  $u$ , то вектор  $\nabla u = (p, q)$  перпендикулярен начальной кривой. Если  $(x, y)$  — точка на проекции характеристики, то

$$u = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + u_0,$$

т.е. построенное решение  $u$  имеет смысл расстояния от точки  $(x, y)$  до начальной кривой плюс константа.

В качестве еще одного примера рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, \mathbf{x}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right) = 0,$$



где  $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  — заданная гладкая функция, называемая функцией Гамильтона. Соответствующая функция  $F$  имеет вид  $F(t, \mathbf{x}, S, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = q + H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ . Особенностью этого уравнения является то, что искомая функция  $S$  не входит в уравнение явно. Уравнения на характеристики имеют вид

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{dS}{d\tau} = q + \mathbf{p} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{dq}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}.$$

Если гамильтониан не зависит явно от времени (т.е.  $q = \text{const}$ ), то уравнения на характеристики сводятся к системе канонических гамильтоновых уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \end{cases}$$

Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 45 из 47

Назад

Полный экран

Закреть

Выход



## Предметный указатель

1-джет, 42

1-струя, 42

асимптотическая устойчивость, 3

задача Коши, 31

изотропным, 43

канонические уравнения Гамильтона, 30

квазилинейное уравнение, 28, 34

контактная гиперплоскость, 39

косоортогональность, 40

начальное многообразие

квазилинейный случай, 35

нехарактеристическая точка, 31

нехарактеристическое начальное условие, 35

первые интегралы, 29

положительная определенность, 10

предельный цикл, 23

седло, 18

сепаратриса, 20

стандартная контактная форма, 40

трансверсальность, 31

узел

неустойчивый, 18

устойчивый, 18

уравнение Лиувилля, 30

устойчивость по Ляпунову, 3, 4

фокус, 21

функция Гамильтона, 30

характеристика

квазилинейное уравнение, 35

линейного уравнения, 29

нелинейной случай, 41

характеристическое поле

квазилинейные уравнения, 35

линейное уравнение, 29

нелинейное уравнение, 41

центр, 21

*Теория устойчивости*

*Качественная теория*

*Уравнения в частных...*

*Предметный указатель*

*Литература*

Веб – страница

Титульный лист



Страница 46 из 47

Назад

Полный экран

Заккрыть

Выход



Теория устойчивости

Качественная теория

Уравнения в частных...

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист



Страница 47 из 47

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

## Список литературы

- [1] Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Наука, 1978.
- [2] Арнольд В.И. *Лекции об уравнениях с частными производными*. Библиотека студента математика. Фазис, 1997.
- [3] Мишина А.П., Проскуряков И.В. *Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра*. Справочная математическая библиотека. Наука, 1965.
- [4] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Мир, 1970.
- [5] Н. Hochstadt. *Differential equations. A modern approach*. Dover Publications, Inc., 1975.