Практическое занятие №1

Тема: Множество и способы описания множества. Операции над множествами. Подмножества.

1. Понятие множества

Понятие множества является фундаментальным неопределяемым понятием.

Интуитивное определение множества – *множество* есть совокупность определенных и различных объектов (элементов).

Символика обозначения множества – пара { } фигурных скобок, внутри которых перечисляются элементы множества. Конкретные множества обозначаются через прописные буквы: A, B, C…, или при помощи индексов: A_1, A_2 и так далее. Элементы множества обозначаются сточными буквами a, b, c … или с индексом $a_1, a_2, \ldots$

Через $\in$ обозначается *отношение принадлежности*. Запись: $x \in X, x \notin X$.

Два множества A и B считают равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Запись A = B, а A $\neq$ B означает неравенство множеств.

Пустое множество - это множество, которое не содержит ни одного элемента, обозначается $\varnothing$ или {}.

Множество X является конечным, если существует натуральное число N, являющееся числом элементов множества. Способы описания множеств:

Перечислительный способ: $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ или $X = \{x_i\}, i \in I$

Описательный способ: $A = \{x \in X \mid f(x)\}$, где f(x) – предикат.

2. Операции над множествами или алгебра множеств

$A' = \{x \mid x \notin A\}$ - *дополнение множества* до некоторого универсального множества P.

$A \bigcup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ - *объединение множеств*;

$A \bigcap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$ - *пересечение множеств*;

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$, но $x \notin B\}$ - *вычитание множеств*.

Свойства множеств

Для A, B и C из класса объектов P имеют место законы:

- ассоциативный закон: $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$ $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$
- коммуникативный закон: $A \bigcup B = B \bigcup A$ $A \bigcap B = B \bigcap A$
- закон о дополнении: $A \bigcup A' = P$, $A \bigcap A' = \varnothing$
- закон эквивалентности: $A \bigcup P = A$, $A \bigcap \varnothing = \varnothing$
- закон о пустом множестве: $A \cup \varnothing = A$, $A \bigcap \varnothing = \varnothing$
- закон инволюции: $(A')' = A$
- закон де Моргана: $(A \bigcup B)' = A' \bigcap B'$ $(A \bigcap B)' = A' \bigcup B'$
- дистрибутивный закон: $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$

3. Подмножества

Множество X является *подмножеством множества* Y, если любой элемент множества X принадлежит множеству Y, которое называют *надмножеством* X. Через $\subseteq$ обозначается *отношение включения множеств*. Запись X $\subseteq$ Y- означает «Y содержит X». Если X $\subseteq$ Y и X $\neq$ Y, то X называется собственным подмножеством Y, и в этом случае пишем X $\subset$ Y.

Свойства подмножеств

$X \subseteq X$ (рефлексивность);

$(X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z) \rightarrow X \subseteq Z$ (транзитивность).

Задания

1. Доказать:
2. Найти:
3. Вычислить $A \bigcup B, A \bigcap B, A \setminus B$, B\A.
4. Используя свойства множеств упростить и вычислить выражение для K.
5. Проверить является ли множество X подмножеством множества Y.

Вариант 1.

1. 1. Свойство рефлексивности;
   2. $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$;
   3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   4. $(A \cap B)' = A' \cup B'$;
   5. $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq B' \cup C$;
   6. Всякое множество есть объединение всех своих подмножеств.
2. Все подмножества множеств $\varnothing$; $\{\varnothing\}$; $\{x\}$; $\{1, 2, 3\}$.
3. P={1,2,3,4,5,6,7,8,9,0}, A={1,2,3}, B={2,3,4,5}.
4. K= $A \bigcap (B \bigcup A') \bigcup B'$.
5. X={1,2,5,6,9}, Y={2,3,4,5,6,8,9}.

Вариант 2.

1. 1. Свойство транзитивности;
   2. $\{\{\varnothing\}, \{1, 2\}\} \neq \{1, 2\}$;
   3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
   4. $(A \cup B)' = A' \cup B'$;
   5. $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;
   6. Всякое множество есть объединение всех своих конечных подмножеств.
2. Число подмножеств множества, состоящего из n элементов.
3. P={1,2,3,4,5,6,7,8,9,0}, A={1,2,3,4}, B={2,4,7,9,0}.
4. K= $A \bigcap (B \bigcup (P \setminus B))$.
5. X={1,2,5,6,9}. Y={2,3,4,5,8,9}.

Вариант 3.

1. 1. $A \setminus B \subseteq A$;
   2. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$;
   3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
   4. закон инволюции;
   5. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;
   6. Всякое множество есть объединение всех своих одноэлементных подмножеств.
2. Число подмножеств из k элементов множества, состоящего из n элементов ($k \leq n$).
3. P={1,2,3,4,5,6,7,8,9,0}, A={1,2,3,4,8}, B={2,3,4,5,9,0}, C={6,7,1}
4. K=$A \cup \varnothing \bigcup (B \bigcap (C \bigcap C')) \bigcap B$
5. X={1,2,5,6,9}, Y={2,3,1,4,5,6,8,9}