Практическое занятие №2

Тема: Прямое произведение множеств. Отношения. Свойства отношений. Произведение отношений. Функции.

1. Прямое произведение множеств

Прямым (декартовым) произведением множеств $A_1, \ldots, A_n$ называют множество,

$$A_1\times\ldots\times A_n = \{<a_1, \ldots, a_n> \mid a_i \in A_i, i = 1, \ldots n\}.$$

Если $A_1 = , \ldots, = A_n = X$, то $A_1\times\ldots\times A_n$ называется *прямой степенью множества* A и обозначается через A^n.

2. Отношения

Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество R множества $A\times B$. Вместо $<x, y> \in R$ часто пишут xRy.

Областью определения бинарного отношения R называется множество

$$\delta_R = \{x \mid \text{существует } y \text{ такое, что } <x, y> \in R\}.$$

Областью значений бинарного отношения R называется множество

$$\rho_R = \{x \mid \text{существует } y \text{ такое, что } <y, x> \in R\}.$$

Обратным отношением для бинарного отношения R называется множество

$$R^{-1} = \{<x, y> \mid <y, x> \in R\}.$$

Произведением подмножеств $R_1 \subseteq A\times B$ и $R_2 \subseteq B\times C$ называется отношение

$$R_1R_2 = \{<x, y> \mid \text{существует } z \text{ такое, что } <x, z> \in R_1, <z, y> \in R_2\}$$

Свойства отношений

Бинарное отношение R на множестве A называется

рефлексивным, если $<x, x> \in R$ для всех $x \in A$;

симметричным, если $<x, y> \in R \Rightarrow <y, x> \in R$;

антисимметричным, если $<x, y> \in R$ и $<y, x> \in R \Rightarrow x = y$;

транзитивным, если $<x, y> \in R$ и $<y, z> \in R \Rightarrow <x, z> \in R$.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве A называется *эквивалентностью* на A. *Классом эквивалентности (смежным классом)* элемента x по эквивалентности R называется множество

$$[x]_R = x/R = \{y \mid <x, y> \in R\}.$$

Множество классов эквивалентности элементов множества A по эквивалентности R называется *фактор-множеством* A по R и обозначается A/R.

Бинарное отношение на множестве A называется *предпорядком* на A, если оно рефлексивно и транзитивно. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение на множестве A называется *частичным порядком* на A ($\leq$).

Частичный порядок $\leq$ на множестве A называется *полным* на A, если каждое непустое подмножество A имеет наименьший элемент. Тогда A называется *вполне упорядоченным*.

3. Функции

Отношение f называется *функцией* из A в B (из а на B), если $\delta_f = A$, $\rho_f \subseteq B$ ($\rho_f = B$) и для всех x, y_1, y_2 из $<x, y_1> \in f$ и $<x, y_2> \in f$ следует $y_1 = y_2$. Обозначение $f\colon A \to B$. Пишем $y = f(x)$ вместо $<x, y> \in f$ и называем y значением функции f при значении аргумента x.

Функция $f\colon A \to B$ осуществляет *взаимно однозначное соответствие* межу A и B, если $\delta_f = A$, $\rho_f = B$ и из того, что $y = f(x_1)$, $y = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$.

Пусть A и B – частично упорядоченные множества и f – функция из A в B. f называется *монотонным отображением*, если из $x_1 \leq x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in A$.

Задания

1. Доказать
2. Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, RR, RR^{-1}, $R^{-1}R$ для отношений
3. Построить бинарное отношение

Вариант 1.

1. 1. Существуют A, B, такие, что $A \times B \neq B \times A$;
   2. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
   3. $\delta_{R1R2} = R_1^{-1}(\rho_{R1} \cap \delta_{R2})$;
   4. $R \cap R = R \cup R = R$;
   5. Если $R_1 \subseteq R_2$, то $QR_1 \subseteq QR_2$;
   6. Если f: $A \rightarrow B$ – взаимно однозначное соответствие, то f^{-1} - взаимно однозначное соответствие между B и A;
   7. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
   8. Если отношения R_1 и R_2 рефлексивны, то рефлексивны и $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}, R_1R_2;
   9. Если R – эквивалентность, то $x \in [x]_R$.
2. R = {<x, y> | x, y ∈ Nat и x делит y}
3. Рефлексивное, симметричное, не транзитивное;

Вариант 2.

1. 1. Существуют A, B, C такие, что $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$;
   2. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$;
   3. $\rho_R^{-1} = \delta_R$, $\delta_R^{-1} = \rho_R$;
   4. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;
   5. Если $R_1 \subseteq R_2$, то $R_1Q \subseteq R_2Q$;
   6. Если f: $A \rightarrow B$ – взаимно однозначное соответствие, то $f^{-1}f = i_B(x) = x$, $x \in B$.
   7. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
   8. Если отношения R_1 и R_2 симметричны, то симметричны $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}, $R_1R_1^{-1}$;
   9. Если R – эквивалентность, то R^{-1} – эквивалентность.
2. R = {<x, y> | x, y ∈ Nat и y делит x}
3. Рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное;

Вариант 3.

1. 1. Если A, B, C, D не пусты, то $A \subseteq B$ и $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$;
   2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
   3. $\rho_{R1R2} = R_2(\rho_{R1} \cap \delta_{R2})$;
   4. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;
   5. Если $R_1 \subseteq R_2$, то $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$;
   6. Если f: $A \rightarrow B$ – взаимно однозначное соответствие, то $f f^{-1} = i_A(x) = x$, $x \in A$.
   7. $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
   8. Если отношения R_1 и R_2 симметричны, то R_1R_2 симметрично тогда и только тогда, когда $R_1R_2 = R_2R_1$;
   9. Если R – эквивалентность, то $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R$.
2. R = {<x, y> | x, y ∈ [$-\pi/2$, $\pi/2$] и $y \geq \sin(x)$}
3. Рефлексивное, транзитивное, не симметричное;