§ 8. Лог-оптимальные портфели инвестирования на рынке ценных бумаг.

1 Введение

Пусть инвестор намерен вложить начальный капитал в некоторые ценные бумаги (акции), стоимость которых в течение одного дня работы рынка ценных бумаг подвержена случайным изменениям. В начале каждого дня он стоит перед проблемой выбора долей капитала, вкладываемых в разные акции (портфеля инвестирования), чтобы к концу дня максимально увеличить свой средний доход. Инвестиционный портфель, на котором достигается максимум, называется оптимальным портфелем.

В данном параграфе изучается теоретико-информационный подход к решению этой задачи, который был предложен в [1], а затем получил существенную разработку в [2] и [3]. Этот подход связан с рассмотрением математического ожидания логарифма случайного роста дохода по всем акциям, которое называется скоростью удвоения (doubling rate). Если изменения стоимости акции в разные дни являются статистически независимыми, то в соответствии с теоретико-вероятностным усиленным законом больших чисел, скорость удвоения определяет (с вероятностью 1) логарифмическую асимптотику роста дохода с увеличением времени работы рынка. Портфель инвестирования, максимизирующий скорость удвоения, называется лог-оптимальным портфелем (log-optimal portfolio) инвестирования. При исследовании лог-оптимального портфеля возможно эффективное применение методов математического анализа для оптимизации выпуклых функций.

2 Постановка задачи

Рынок ценных бумаг (акций) в фиксированный день его работы задается вектором *относительных стоимостей* акций

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m), \quad X_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где m - число акций на рынке, а компонента X_i представляет собой отношение цены i-ой акции в конце дня к еЯ стоимости в начале дня. Вектор относительных стоимостей $\mathbf{X}$ интерпретируется как m-мерный случайный вектор. Типичные значения X_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, близки к 1. Например, $X_i = 1.03$ означает, что стоимость i-ой акции за день повысилась на 3%.

Пусть $F = F(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ обозначает совместное распределение компонент вектора $\mathbf{X}$, т.е.

$$F(\mathbf{x}) = \Pr\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_m < x_m\}.$$

Для функции $S = S(\mathbf{x})$ символом

$$ES = ES(\mathbf{X}) = \int S(\mathbf{x})\, dF(\mathbf{x})$$

будем обозначать математическое ожидание случайной величины $S = S(\mathbf{X})$ по распределению $F = F(\mathbf{x})$. Для произвольной пары m-мерных векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ введем обозначение *скалярного произведения*

$$\mathbf{x}^t\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i.$$

Мы будем изучать *стационарную* модель рынка акций, определяемую следующими условиями.

- Во все дни работы рынка функция совместного распределения относительных стоимостей акций $F = F(\mathbf{x})$ одна и та же. Будем рассматривать два типа распределений.

  – Распределение $F = F(\mathbf{x})$ дискретно и случайный вектор $\mathbf{X}$ задается конечным набором вероятностей

  $$f(\mathbf{x}) = \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\}.$$

  – Для распределения $F = F(\mathbf{x})$ существует непрерывная совместная плотность, которую будем обозначать символом $f = f(\mathbf{x})$.

- Применяется *стационарная стратегия инвестирования*, когда капитал инвестора по всем акциям в конце предыдущего дня на следующий день снова вкладывается в те же акции.

- Доля капитала

  $$b_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} b_i = 1,$$

  ежедневно вкладываемая в i-ую акцию, предполагается постоянной в каждый день работы рынка. Выбираемый инвестором вероятностный вектор $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ называется *портфелем инвестирования* или *инвестиционным портфелем*. Символом

  $$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{b} : b_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} b_i = 1 \right\}$$

  обозначим выпуклую область (симплекс) всевозможных значений вероятностного вектора $\mathbf{b}$.

Пусть A_0 – капитал инвестора, вкладываемый в начале дня в акции рынка ценных бумаг в соответствии с инвестиционным портфелем $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, а случайная величина X_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ является отношением стоимости i-ой акции в конце дня к еЯ стоимости в начале дня. Капитал инвестора по всем акциям в конце дня составляет

$$A_1 = \sum_{i=1}^{m} A_0 b_i X_i = A_0 \mathbf{b}^t \mathbf{X}.$$

Поэтому для инвестиционного портфеля $\mathbf{b}$ отношение капитала инвестора по всем акциям в конце дня к капиталу в начале дня, т.е. случайный рост $S_1 = S_1(\mathbf{b}, \mathbf{X}) = A_1/A_0$ дохода инвестора по всем акциям за один день, задается формулой

$$S_1 = S_1(\mathbf{b}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} b_i X_i = \mathbf{b}^t \mathbf{X}.$$

Обозначим через $W(\mathbf{b}, F)$ математическое ожидание двоичного логарифма от случайного дневного роста дохода, т.е.

$$W(\mathbf{b}, F) = E \log_2 S_1 = E \left(\log_2 \left\{ \sum_{i=1}^{m} b_i X_i \right\} \right) = E(\log_2 \mathbf{b}^t X) =$$

$$= \int \log_2 \mathbf{b}^t \mathbf{x} \, dF(\mathbf{x}) = \int \log_2 \{\mathbf{b}^t \mathbf{x}\} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Определение. Величина $W(\mathbf{b}, F)$ называется *скоростью удвоения* (doubling rate) рынка ценных бумаг с распределением относительных стоимостей акций $F = F(\mathbf{x})$ и инвестиционным портфелем $\mathbf{b}$.

Определение. *Оптимальной* скоростью удвоения называется величина

$$W^*(F) = \max_{\mathbf{b}} W(\mathbf{b}, F),$$

где максимум, который для рассматриваемых нами дискретного и непрерывного распределений достигается, берется по всевозможным портфелям инвестирования $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$.

Определение. Портфель $\mathbf{b}^* = b^*(F)$, на котором достигается максимум $W(\mathbf{b}, F)$, называется *лог-оптимальным портфелем* инвестирования.

Пусть

$$\mathbf{X}^j = (X_1^j, X_2^j, \ldots, X_m^j) \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

обозначает m-мерный вектор относительных стоимостей акций в j-ый день работы стационарного рынка с портфелем инвестирования $\mathbf{b}$. Очевидно, что *рост S_n дохода инвестора по всем m акциям за n дней* задается формулой

$$S_n = \prod_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} b_i X_i^j \right\} = \prod_{j=1}^{n} \mathbf{b}^t \mathbf{X}^j.$$

Имеем
$$\frac{1}{n}\log_2 S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\log_2\left\{\sum_{i=1}^{m} b_i X_i^j\right\} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\log_2 \mathbf{b}^t\mathbf{X}^j.$$
Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ математическое ожидание
$$E\left(\log_2\left\{\sum_{i=1}^{m} b_i X_i^j\right\}\right) = E\left(\log_2 \mathbf{b}^t\mathbf{X}^j\right) = W(\mathbf{b}, F).$$

Поэтому, в соответствии с усиленным законом больших чисел, введенное выше понятие скорости удвоения оправдывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть случайные величины $\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \ldots, \mathbf{X}^n$, являются статистически независимыми одинаково распределенными m-мерными случайными величинами с распределением $F = F(\mathbf{x})$. Тогда с вероятностью 1 существует*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_2 S_n = W(\mathbf{b}, F).$$

Замечание. Пусть S_n^* обозначает рост дохода за n дней при лог-оптимальном портфеле $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}^*(F)$. Тогда из теоремы 1 вытекает приближенное (при больших n) равенство
$$S_n^* \approx 2^{nW^*(F)}.$$

Дальнейшей целью нашей работы является исследование свойств скорости удвоения $W(\mathbf{b}, F)$ и сответствующего лог-оптимального портфеля $\mathbf{b}^*(F)$.

В разделе 3 устанавливается важное свойство выпуклости вверх функции $W(\mathbf{b}, F)$ по аргументу $\mathbf{b}$, которое является следствием свойства выпуклости вверх логарифмической функции. Затем с помощью этого свойства доказывается теорема характеризации (т.е. теорема, описывающая необходимые и достаточные условия) для лог-оптимального портфеля $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}^*(F)$. Анализируются некоторые важные следствия этой теоремы.

В разделе 4 исследуется ситуация, когда при распределении $F = F(\mathbf{x})$ на рынке ценных бумаг вместо лог-оптимального портфеля инвестирования $\mathbf{b}^*(F)$ применяется лог-оптимальный портфель $\mathbf{b}^*(G)$, где $G = G(\mathbf{x})$ – некоторое произвольное фиксированное распределение вероятностей. При этом величина
$$\Delta W = W(\mathbf{b}^*(F), F) - W(\mathbf{b}^*(G), F)$$
представляет собой число, на которое можно было бы *увеличить* скорость удвоения, если бы применялся лог-оптимальный портфель $\mathbf{b}^*(F)$. Показано, что верхней оценкой ΔW является расстояние Кульбака [4] между распределеними F и G. Этот результат используется для исследовании вопроса об *увеличении скорости удвоения* (при лог-оптимальном портфеле инвестирования) *за счет наличия дополнительной информации об относительной стоимости акций на рынке ценных бумаг.*

В разделе 5 анализируется интересный частный случай дискретной модели рынка ценных бумаг, которая адекватна *тотализатору на скачках.* Устанавливается теоретико-информационная [4] интерпретация величины, на которую возрастает скорость удвоения (при лог-оптимальном портфеле инвестирования) за счет наличия дополнительной информации о результатах скачек.

В разделе 6 дается сводка основных определений и выводов, связанных с рассмотрением концепции лог-оптимального портфеля инвестирования на рынке ценных бумаг.

3 Характеризация лог-оптимального портфеля $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}^*(F)$

Имеет место

Лемма 1. *Скорость удвоения* $W(\mathbf{b}, F)$ *выпукла вверх как функция аргумента* $\mathbf{b}$*, т.е. для любого числа* λ*,* $0 < \lambda < 1$ *и любой пары* $\mathbf{b_1}$*,* $\mathbf{b_2}$ *значений аргумента* $\mathbf{b}$ *справедливо неравенство*

$$W(\lambda \mathbf{b_1} + (1-\lambda)\mathbf{b_2}, F) \geq \lambda W(\mathbf{b_1}, F) + (1-\lambda) W(\mathbf{b_2}, F).$$

Доказательство. Из свойства выпуклости вверх логарифмической функции следует, что для любого числа λ, $0 < \lambda < 1$, любого вектора $\mathbf{X}$ и любой пары $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ значений аргумента $\mathbf{b}$ справедливо неравенство

$$\log_2\{(\lambda \mathbf{b_1} + (1-\lambda)\mathbf{b_2})^t \mathbf{X}\} = \log_2\{\lambda \mathbf{b_1}^t \mathbf{X} + (1-\lambda)\mathbf{b_2}^t \mathbf{X}\} \geq$$

$$\geq \lambda \log_2\{\mathbf{b_1}^t \mathbf{X}\} + (1-\lambda)\log_2\{\mathbf{b_2}^t \mathbf{X}\}.$$

Вычисляя (интегрируя по распределению $F = F(\mathbf{x})$) математические ожидания левой и правой частей этого неравенства и учитывая определение скорости удвоения $W(\mathbf{b}, F)$, получаем неравенство, сформулированное в утверждении леммы.
Лемма 1 доказана.

Чтобы сформулировать теорему характеризации (т.е. необходимые и достаточные условия) лог-оптимального портфеля $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}^*(F)$, нам потребуется следующий результат, который описывает необходимые и достаточные условия максимизации выпуклой вверх функции $W(\mathbf{b})$ по выпуклой области $\mathcal{B}$ всевозможных значений вероятностного вектора (портфеля) $\mathbf{b}$.

Лемма 2. *Пусть* $W(\mathbf{b})$ *является выпуклой вверх функцией* $\mathbf{b}$ *в области* $\mathcal{B}$*, где* $\mathbf{b}$ *– вектор вероятностей. Предположим, что частные производные*

$$\frac{\partial W(\mathbf{b})}{\partial b_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

определены и непрерывны в области $\mathcal{B}$ *с тем возможным исключением, что*

$$\lim_{b_i \to 0} \frac{\partial W(\mathbf{b})}{\partial b_i}$$

может быть равен $+\infty$ для некоторых i. Тогда, если при некотором значении C вероятностный вектор $\mathbf{b}$ *удовлетворяет условиям*

$$\frac{\partial W(\mathbf{b})}{\partial b_i} = \begin{cases} = C, & \text{если} b_i > 0, \\ \leq C, & \text{если} b_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{1}$$

то этот вектор максимизирует $W(\mathbf{b})$ в области $\mathcal{B}$. И, наоборот, если $\mathbf{b}$ *максимизирует $W(\mathbf{b})$ в области $\mathcal{B}$, то условия* (1) *удовлетворяются при некотором C.*

Доказательство леммы 2 можно найти в [4, теорема 4.4.1]. Далее будем предполагать, что для скорости удвоения $W(\mathbf{b}) = W(\mathbf{b}, F)$ выполнены условия леммы 2. Отметим, что эти условия, очевидным образом, выполнены для рассматриваемых нами случаев дискретного и непрерывного распределений.

Пользуясь определением скорости удвоения

$$W(\mathbf{b}, F) = E\left(\log\left\{\sum_{i=1}^{m} b_i X_i\right\}\right) = E(\log_2 \mathbf{b}^t X)$$

и учитывая возможность перестановки операций вычисления производной и математического ожидания, для частной производной скорости удвоения имеем

$$\frac{\partial W(\mathbf{b}, F)}{\partial b_i} = E\left(\frac{X_i}{\mathbf{b}^t \mathbf{X}}\right).$$

Поэтому условие (1) леммы 2 при максимизации скорости удвоения принимает вид

$$E\left(\frac{X_i}{\mathbf{b}^t \mathbf{X}}\right) = \begin{cases} = C, & \text{если} b_i > 0, \\ \leq C, & \text{если} b_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку

$$\sum_{i=m}^{m} b_i E\left(\frac{X_i}{\mathbf{b}^t \mathbf{X}}\right) = 1,$$

то умножая левую и правую части (2) на ненулевые компоненты лог-оптимального портфеля $\mathbf{b}^* = (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_m^*)$, получаем значение $C = 1$. Поэтому теорему характеризации (т.е. необходимые и достаточные условия) лог-оптимального портфеля можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Лог-оптимальный портфель*

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b}^*(F), \quad \mathbf{b}^* = (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_m^*),$$

максимизирующий скорость удвоения $W(\mathbf{b}, F)$, удовлетворяет следующим необходимым и достаточным условиям

$$E\left(\frac{X_i}{\mathbf{b}^{*t} \mathbf{X}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если} b_i^* > 0, \\ \leq 1, & \text{если} b_i^* = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \tag{3}$$

Далее, для полноны изложения, мы даем вывод теоремы 2, в котором не участвует приведенная выше лемма 2, а используется необходимое и достаточное условие максимума выпуклой вверх функции, состоящее в *неположительности направленных производных из точки максимума.*

Доказательство теоремы 2. В силу леммы 1, скорость удвоения $W(\mathbf{b}) = W(\mathbf{b}, F)$ выпукла вверх как функция аргумента $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, который может принимать произвольные значения во всем симплексе портфелей $\mathcal{B}$. Отсюда следует, что вектор $\mathbf{b}^*$ является лог-оптимальным тогда и только тогда, когда направленная производная функции $W(\mathbf{b})$ в направлении от $\mathbf{b}^*$ к любому другому портфелю $\mathbf{b}$ является неположительной. Для удобной формальной записи этого условия введем обозначение

$$\mathbf{b}_\lambda = (1-\lambda)\mathbf{b}^* + \lambda\mathbf{b}, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Заметим, что фиксированный портфель $\mathbf{b}^*$ является лог-оптимальным портфелем тогда и только тогда, когда для любого другого портфеля $\mathbf{b}$ односторонняя производная функции $W(\mathbf{b}_\lambda)$ действительного аргумента $\lambda \ge 0$ при $\lambda = 0+$ является неположительной, т.е.

$$w(\mathbf{b}) = \frac{d}{d\lambda} W(\mathbf{b}_\lambda)|_{\lambda=0+} = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{W(\mathbf{b}_\lambda) - W(\mathbf{b}^*)}{\lambda} \le 0. \tag{4}$$

Используя определение скорости удвоения $W(\mathbf{b})$, при вычислении указанной односторонней производной получаем

$$\frac{d}{d\lambda} W(\mathbf{b}_\lambda)|_{\lambda=0+} = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} E\left(\log_2\{(1-\lambda)\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X} + \lambda\mathbf{b}^t\mathbf{X}\} - \log_2\{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}\}\right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} E\left(\log_2\left(\frac{(1-\lambda)\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X} + \lambda\mathbf{b}^t\mathbf{X}}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}\right)\right) =$$

$$= E\left(\lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} \log_2\left(1 + \lambda\left(\frac{\mathbf{b}^t\mathbf{X}}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}} - 1\right)\right)\right) = \left[E\left(\frac{\mathbf{b}^t\mathbf{X}}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}\right) - 1\right]\log_2 e.$$

Следовательно, (4) означает, что фиксированный портфель $\mathbf{b}^*$ является лог-оптимальным портфелем тогда и только тогда, когда для любого другого портфеля $\mathbf{b}$ справедливо неравенство

$$E\left(\frac{\mathbf{b}^t\mathbf{X}}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}\right) \le 1. \tag{5}$$

Пусть для некоторого портфеля $\mathbf{b}$ найдется отрицательное число $\beta < 0$ такое что

$$\mathbf{b}_\lambda = (1-\lambda)\mathbf{b}^* + \lambda\mathbf{b} \in \mathcal{B}, \quad \beta \le \lambda \le 0. \tag{6}$$

Это означает, что направленный отрезок, проведенный от вектора $\mathbf{b}$ к вектору $\mathbf{b}^*$, *можно продлить через* $\mathbf{b}^*$ *до вектора* $\mathbf{b}_\beta$ *внутри симплекса* $\mathcal{B}$. Кроме того, очевидны следующие утверждения:

- функция $W(\mathbf{b}_\lambda)$ при $\lambda = 0$ имеет двустороннюю производную

$$w(\mathbf{b}) = \frac{d}{d\lambda} W(\mathbf{b}_\lambda)|_{\lambda=0} = \left[E\left(\frac{\mathbf{b}^t \mathbf{X}}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}} \right) - 1 \right] \log_2 e;$$

- справедливо равенство $w(\mathbf{b}_\beta) = -w(\mathbf{b})$.

Из данных утверждений и неравенства (4) вытекает, что в рассматриваемом случае двусторонняя производная $w(\mathbf{b}) = 0$. Иными словами, мы показали, что для портфеля $\mathbf{b}$, удовлетворяющего (6), условие (5) выполняется со знаком равенства.

Заметим, что величина $E\left(\frac{\mathbf{b}^t\mathbf{X}}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}\right)$, стоящая в левой части (5), является линейной функцией аргумента $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$. Поэтому при характеризации лог-оптимального портфеля достаточно требовать выполнения неравенства (5) лишь для следующих m значений вектора

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}^i = (e_1^i, e_2^i, \ldots, e_m^i), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где

$$e_k^i = \begin{cases} 1, & \text{если} k = i, \\ 0, & \text{если} k \neq i, \ k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

совпадающих с экстремальными точками симплекса. Легко заметить, что при $\mathbf{b} = \mathbf{e}^i$ условие (6) может быть выполнено тогда и только тогда, когда i-ая компонента лог-оптимального портфеля $b_i^* > 0$. После подстановки этих экстремальных точек симплекса в (5) получаем утверждение теоремы 2.
Теорема 2 доказана.

Пусть $S^* = \mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}$ обозначает отношение капитала инвестора по всем акциям в конце дня к капиталу в начале дня при использовании лог-оптимального портфеля $\mathbf{b}^* = (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_m^*)$. Другими словами, S^* обозначает случайный рост дохода по всем акциям за один день при лог-оптимальном портфеле инвестирования. Для произвольного фиксированного портфеля инвестирования $\mathbf{b}$ аналогичный случайный рост дохода обозначим символом $S = \mathbf{b}^t\mathbf{X}$.

Из теоремы 2 вытекают приводимые в теореме 3 важные свойства лог-оптимального портфеля инвестирования.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Математическое ожидание отношения дохода при произвольном фиксированном портфеле инвестирования* $\mathbf{b}$ *к доходу при лог-оптимальном портфеле инвестирования не превосходит 1, т.е.*

$$E\left(\frac{S}{S^*}\right) \leq 1. \tag{7}$$

2. *Пусть* $\mathbf{b}$ *– произвольный фиксированный портфель инвестирования, для которого математическое ожидание* $E\left(\frac{S}{S^*}\right) \leq 1$. *Тогда для данного портфеля* $\mathbf{b}$ *математическое ожидание*

$$E\left(\log_2\left\{\frac{S}{S^*}\right\}\right) \leq 0.$$

3. *При лог-оптимальном портфеле инвестирования* $\mathbf{b}^* = (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_m^*)$ *число* b_i^*, $i = 1, 2, \ldots, m$ *совпадает с математическим ожиданием случайной доли дохода по* i*-ой акции в конце рабочего дня рынка. Это означает следующее свойство стационарности лог-оптимального портфеля инвестирования: ожидаемая в конце дня доля дохода по* i*-ой акции совпадает с долей капитала, инвестируемого в начале дня в* i*-ую акцию,* $i = 1, 2, \ldots, m$.

Замечание. Неравенство (7) дает интересную, полезную и наглядную интерпретацию "оптимальности"лог-оптимального портфеля инвестирования на рынке ценных бумаг. Следует обратить внимание на то, что (7) не равносильно "более естественному критерию оптимальности", при котором требуется выполнение неравенства $ES \leq ES^*$. Отметим также, что утверждение 2 можно рассматривать в качестве "обратного"к утверждению 1.

Доказательство. 1. Согласно теореме 2, для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ справедливо неравенство

$$E\left(\frac{X_i}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}\right) \leq 1.$$

Умножая это неравенство на b_i и суммируя по $i = 1, 2, \ldots, m$, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} b_i E\left(\frac{X_i}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}\right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i = 1.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству утверждения 1:

$$E\left(\frac{\mathbf{b}^{t}\mathbf{X}}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}\right) = E\left(\frac{S}{S^*}\right) \leq 1.$$

2. Применяя неравенство Йенсена для логарифмической функции, получим

$$E\left(\log_2\left\{\frac{S}{S^*}\right\}\right) \leq \log_2\left\{E\left(\frac{S}{S^*}\right)\right\} \leq \log_2 1 = 0.$$

3. При лог-оптимальном портфеле инвестирования $\mathbf{b}^* = (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_m^*)$ случайная доля дохода по i-ой акции есть $\frac{b_i^* X_i}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}$. Для математического ожидания (среднего значения) этой доли имеем

$$E\left(\frac{b_i^* X_i}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}\right) = b_i^* E\left(\frac{X_i}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}\right) = b_i^* 1 = b_i^*.$$

Теорема 3 доказана.

4 Увеличение скорости удвоения при наличии дополнительной информации

В этом разделе (для определенности) будем рассматривать ситуацию, когда теоретическое распределение $F = F(\mathbf{x})$ на рынке ценных бумаг обладает плотностью

$f = f(\mathbf{x})$. С очевидными изменениями в обозначениях все сформулированные здесь результаты будут справедливы также для случая дискретного распределения $F = F(\mathbf{x})$. Эти изменения будут проиллюстрированы в следующем разделе 5, где в качестве важного дискретного примера исследуется лог-оптимальный портфель инвестирования для тотализатора на скачках.

Предположим, что вместо лог-оптимального портфеля $\mathbf{b}^*(F)$ инвестирования используется другой лог-оптимальный портфель $\mathbf{b}^*(G)$, где $G = G(\mathbf{x})$ – некоторое произвольное фиксированное распределение с плотностью $g = g(\mathbf{x})$. Тогда

$$\Delta W = W(\mathbf{b}^*(F), F) - W(\mathbf{b}^*(G), F) \tag{1}$$

представляет собой величину, на которую можно было бы увеличить скорость удвоения, если использовать лог-оптимальный портфель $\mathbf{b}^*(F)$.

Определим *расстояние Кульбака* [4, 5] между распределениями вероятностей на рынке ценных бумаг F и произвольным фиксированным распределением вероятностей G:

$$D(f\|g) = \int f(\mathbf{x}) \log_2 \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \geq 0.$$

Отметим, что неотрицательность расстояния Кульбака (со знаком равенства нулю лишь в случае $f = g$) вытекает из хорошо известного неравенства для натурального логарифма $\ln u \leq u - 1$ с равенством лишь при $u = 1$, а именно:

$$-D(f\|g) = [\log_2 e] \int f(\mathbf{x}) \ln \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \leq$$

$$\leq [\log_2 e] \int f(\mathbf{x}) \left[\frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} - 1\right] d\mathbf{x} =$$

$$= [\log_2 e] \left[\int g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right] = 0.$$

Замечание. Отметим, что в случае дискретной модели расстояние Кульбака, удовлетворяющее указанному выше свойству, определяется формулой

$$D(f\|g) = \sum_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \log \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}.$$

Теорема 4. *Для любой пары распределений F и G имеет место неравенство*

$$\Delta W \leq D(f\|g).$$

Доказательство. При выводе неравенства будем использовать следующие обозначения для лог-оптимальных портфелей: $\mathbf{b}^*_f = \mathbf{b}^*(F)$ и $\mathbf{b}^*_g = \mathbf{b}^*(G)$. Применяя определение скорости удвоения, можем написать

$$\Delta W = W(\mathbf{b}^*(F), F) - W(\mathbf{b}^*(G), F) =$$

$$= \int f(\mathbf{x}) \log_2\{\mathbf{b}_f^{*t}\mathbf{x}\}\, d\mathbf{x} - \int f(\mathbf{x}) \log_2\{\mathbf{b}_g^{*t}\mathbf{x}\}\, d\mathbf{x} =$$

$$= \int f(\mathbf{x}) \log_2 \left\{ \frac{\mathbf{b}_f^{*t}\mathbf{x}}{\mathbf{b}_g^{*t}\mathbf{x}} \right\} d\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x}) \log_2 \left\{ \frac{\mathbf{b}_f^{*t}\mathbf{x}}{\mathbf{b}_g^{*t}\mathbf{x}}\, \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}\, \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right\} d\mathbf{x} =$$

$$= \int f(\mathbf{x}) \log_2 \left\{ \frac{\mathbf{b}_f^{*t}\mathbf{x}}{\mathbf{b}_g^{*t}\mathbf{x}}\, \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} \right\} d\mathbf{x} + D(f\|g) \le$$

$$\le \log_2 \left\{ \int f(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{b}_f^{*t}\mathbf{x}}{\mathbf{b}_g^{*t}\mathbf{x}}\, \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \right\} + D(f\|g) = \log_2 \left\{ \int g(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{b}_f^{*t}\mathbf{x}}{\mathbf{b}_g^{*t}\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} \right\} + D(f\|g),$$

где использовали неравенство Йенсена для логарифмической функции.

Пусть $\mathbf{b}_g^*$ является лог-оптимальным портфелем для распределения G, а $\mathbf{b}$ – произвольный портфель. Теорема 3 означает, что

$$\int g(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{b}^t\mathbf{x}}{\mathbf{b}_g^{*t}\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} = E\left(\frac{\mathbf{b}^t\mathbf{X}}{\mathbf{b}_g^{*t}\mathbf{X}} \right) \le 1.$$

Применим это неравенство при $\mathbf{b} = \mathbf{b}_f^*$. Получим

$$\Delta W \le \log_2 \left\{ \int g(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{b}_f^{*t}\mathbf{x}}{\mathbf{b}_g^{*t}\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} \right\} + D(f\|g) \le \log_2 1 + D(f\|g) = D(f\|g).$$

Теорема 4 доказана.

Рассмотрим теперь ситуацию на рынке ценных бумаг, когда инвестор знает не только совместную плотность $f(\mathbf{x})$ вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ относительных стоимостей акций, а также обладает некоторыми *дополнительными сведениями* об $\mathbf{X}$. Мы будем изучать следующую математическую модель лог-оптимального портфеля инвестирования на рынке ценных бумаг.

- Введем случайную величину Y, принимающую действительные значения y и имеющую непрерывную плотность распределения $f(y)$. Эта величина Y называется дополнительными сведениями и связана с $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ совместной плотностью распределения $f(\mathbf{x}, y)$, которая считается известной инвестору. Отметим, что маргинальные плотности $f(\mathbf{x})$ и $f(y)$ вычисляются по плотности совместного распределения:

  $$f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}, y)\, dy, \quad f(y) = \int f(\mathbf{x}, y)\, d\mathbf{x}.$$

- В начале дня инвестору сообщается значение случайной величины $Y = y$ и он в этот день применяет лог-оптимальный портфель инвестирования в соответствии с условной плотностью распределения

  $$f(\mathbf{x}|Y = y) = \frac{f(\mathbf{x}, y)}{f(y)}. \tag{2}$$

- Обозначим через $\Delta W_{Y=y}$ увеличение скорости удвоения (1), которого инвестор достигает за счет дополнительных сведений $Y = y$, и введем усредненную характеристику
$$\Delta W = \int_y f(y) \Delta W_{Y=y} \, dy \tag{3}$$
называемую *средним увеличением скорости удвоения для лог-оптимального портфеля инвестирования на рынке ценных бумаг* $\mathbf{X}$ *за счет дополнительных сведений* Y

Для совместной плотности $f(\mathbf{x}, y)$ определим введенную К.Шенноном (для описания математических моделей передачи и хранения сообщений в системах связи) важную числовую характеристику совместной плотности
$$I(\mathbf{X}, Y) = \int_{\mathbf{x}} \int_y f(\mathbf{x}, y) \log_2 \frac{f(\mathbf{x}, y)}{f(\mathbf{x}) f(y)} \, d\mathbf{x} dy,$$
называемую *взаимной информацией* [4] пары случайных величин $(\mathbf{X}, Y)$. Значение $I(\mathbf{X}, Y)$ можно рассматривать (наряду с корреляцией) как числовой критерий связи случайных величин $(\mathbf{X}, Y)$. Из неотрицательности расстояния Кульбака вытекает, что для любой совместной плотности информация $I(\mathbf{X}, Y) \geq 0$, где знак равенства тогда и только тогда, когда случайные величины $\mathbf{X}$ и Y независимы.

Теорема 5 дает верхнюю границу для среднего увеличения скорости удвоения ΔW. Эта граница совпадает с величиной $I(\mathbf{X}, Y)$, которую можно интерпретировать как *информацию, содержащуюся о рынке ценных бумаг* $\mathbf{X}$ *в дополнительных сведениях* Y.

Теорема 5. *Справедливо неравенство*
$$\Delta W \leq I(\mathbf{X}, Y).$$

Доказательство. В силу теоремы 4, для увеличения скорости удвоения $\Delta W_{Y=y}$, достигаемого за счет дополнительных сведений $Y = y$, имеет место неравенство
$$\Delta W_{Y=y} \leq D(f(\mathbf{x}|Y = y) \| f(\mathbf{x})) = \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}|Y = y) \log_2 \frac{f(\mathbf{x}|Y = y)}{f(\mathbf{x})} d\mathbf{x}.$$
Усредняя это неравенство по распределению $f(y)$ и учитывая определения (2) и (3), получаем
$$\begin{aligned}\Delta W &\leq \int_y f(y) \left\{ \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}|Y = y) \log_2 \frac{f(\mathbf{x}|Y = y)}{f(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right\} dy = \\ &= \int_y \int_{\mathbf{x}} f(y) f(\mathbf{x}|Y = y) \log_2 \left\{ \frac{f(\mathbf{x}|Y = y)}{f(\mathbf{x})} \frac{f(y)}{f(y)} \right\} d\mathbf{x} dy = \\ &= \int_{\mathbf{x}} \int_y f(\mathbf{x}, y) \log_2 \frac{f(\mathbf{x}, y)}{f(\mathbf{x}) f(y)} \, d\mathbf{x} dy = I(\mathbf{X}, Y).\end{aligned}$$
Теорема 5 доказана.

Замечание. С учетом очевидных изменений в обозначениях, теоремы 4 и 5 остаются справедливыми для дискретного распределения $F(\mathbf{x})$.

5 Тотализатор на скачках

5.1 Обозначения и определения

Пусть m, как и ранее, обозначает число акций на рынке ценных бумаг. В этом разделе мы будем исследовать пример дискретной модели рынка ценных бумаг, когда случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ относительных стоимостей акций может принимать лишь одно из m возможных значений вида

$$\mathbf{e}^i = (e_1^i, e_2^i, \ldots, e_m^i), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где

$$e_k^i = \begin{cases} o_i, & \text{если} k = i, \\ 0, & \text{если} k \neq i, \ k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

а $o_i > 1, \ i = 1, 2, \ldots, m$–фиксированный набор из m положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{o_i} = 1. \tag{1}$$

Дискретное распределение вероятностей в рассматриваемой модели рынка ценных бумаг

$$f(\mathbf{x}) = \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\} = \begin{cases} f(\mathbf{e}^i), & \text{если} \mathbf{x} = \mathbf{e}^i, \\ 0, & \text{если} \mathbf{x} \neq \mathbf{e}^i, \ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

описывается набором чисел

$$\mathsf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m), \ p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

i-ая компонента которого

$$p_i = f(\mathbf{e}^i) = \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{e}^i\}$$

задает вероятность победы в забеге i-ой лошади.

Данная модель адекватна *тотализатору на скачках*, в которых участвуют m лошадей и вероятность победы i-ой лошади в любом из забегов равна p_i. Эта вероятность, вообще говоря, неизвестна инвестору (игроку) который перед началом каждого забега вкладывает свой капитал в тотализатор, руководствуясь портфелем инвестирования $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Если в данном забеге выигрывает i-ая лошадь, то поставленный на еЯ победу капитал увеличивается в o_i раз, а капитал, поставленный на победы других лошадей, пропадает. Число o_i назывется *ставкой букмекера* на победу i-ой лошади. Учитывая условие (1), введем вероятностный вектор

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_m), \ r_i = \frac{1}{o_i}, \quad \sum_{i=1}^{m} r_i = 1,$$

называемый *портфелем букмекера* и представляющий собой *оценку букмекера* для неизвестного распределения вероятностей p на скачках.

5.2 Скорость удвоения

В результате победы i-ой лошади начальный капитал игрока после забега увеличивается в $b_i o_i$ раз. Это приводит к следующему определению скорости удвоения для тотализатора на скачках

$$W(\mathbf{b}, f) = W(\mathbf{b}, \mathsf{p}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log b_i o_i. \tag{2}$$

Используя обозначение расстоянием Кульбака

$$D(\mathsf{p}\|\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{p_i}{b_i} \geq 0,$$

определение (2) записывается в виде

$$W(\mathbf{b}, f) = W(\mathbf{b}, \mathsf{p}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 \left(\frac{b_i}{p_i} \frac{p_i}{r_i} \right) = D(\mathsf{p}\|\mathbf{r}) - D(\mathsf{p}\|\mathbf{b}). \tag{3}$$

Данная запись показывает, что игрок может добиться положительной скорости удвоения, т.е. выигрыша в тотализаторе на скачках, тогда и только тогда, когда расстояние Кульбака $D(\mathsf{p}\|\mathbf{b})$ между его инвестиционным портфелем $\mathbf{b}$ и неизвестным распределением p оказалось меньше расстояния Кульбака $D(\mathsf{p}\|\mathbf{r})$ между портфелем букмекера $\mathbf{r}$ и p.

Поскольку расстояние Кульбака $D(\mathsf{p}\|\mathbf{b}) \geq 0$ со знаком равенства лишь при $\mathbf{b} = \mathsf{p}$, то из неравенства (3) вытекает

Теорема 6. *Оптимальная скорость удвоения*

$$W^*(\mathsf{p}) = \max_{\mathbf{b}} W(\mathbf{b}, \mathsf{p}) = D(\mathsf{p}\|\mathbf{r}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 (p_i o_i) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 o_i + \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i,$$

где максимум достигается на лог-оптимальном портфеле $\mathbf{b}^*_{\mathbf{f}} = \mathsf{p}$.

5.3 Тотализатор с дополнительной информацией

В разделе 4 с помощью теорем 4 и 5 была получена теоретико-информационная оценка

$$\Delta W \leq I(\mathbf{X}, Y) \tag{4}$$

для среднего значения увеличения скорости удвоения ΔW, когда инвестор располагает дополнительными сведениями Y о рынке ценных бумаг $\mathbf{X}$. Пусть

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m), \ q_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} q_i = 1,$$

–произвольный фиксированный вероятностный вектор, а $g = g(\mathbf{x})$ – соответствующее ему распределение вероятностей, которое задается аналогично распределению $f = f(\mathbf{x})$, введенному выше для вероятностностного вектора p. Из вывода оценки (4) следует, что в неравенстве (4) будет знак равенства, если для скорости удвоения выполнено условие

$$W(\mathbf{b}_{\mathbf{f}}^*, f) - W(\mathbf{b}_{\mathbf{g}}^*, f) = D(f\|g) = D(\mathsf{p}\|\mathbf{q}). \tag{5}$$

Согласно теореме 6, для тотализатора на скачках лог-оптимальный портфель $\mathbf{b}_{\mathbf{f}}^* = \mathsf{p}$, а лог-оптимальный портфель $\mathbf{b}_{\mathbf{g}}^* = \mathbf{q}$. Отсюда, в силу определения (2), вытекает выполнение условия (5). Таким образом, установлена

Теорема 7. *Если игрок тотализатора на скачках располагает дополнительными сведениями Y о результате забега $\mathbf{X}$, то для лог-оптимального портфеля ставок игрока возникающее за счет этих сведений среднее значение увеличения скорости удвоения ΔW совпадает с информацией $I(\mathbf{X}, Y)$.*

В заключении этого раздела мы приведем непосредственное доказательство теоремы 7, которое не опирается на общие результаты теорем 4 и 5 для произвольного рынка ценных бумаг, а использует лишь некоторую приводимую ниже модификацию обозначений и определений, описывающих модель тотализатора на скачках при наличии дополнительной информации о результатах забега.

- Пусть пара дискретных случайных величин (X, Y) со значениями (x, y), где $x = 1, 2, \dots, m$, имеет совместное распределение $p(x, y) = \Pr\{X = x, Y = y\}$, которое известно игроку (инвестору). При этом
  - случайная величина X с распределением $p(x) = \sum_y p(x, y)$ обозначает номер лошади, победившей в забеге;
  - случайная величина Y представляет собой дополнительные сведения о результатах забега, т.е. перед началом забега игроку сообщается значение величины $Y = y$;
  - $p(x|y)$ и $p(y)$ обозначают соответствующие условное и маргинальное распределения.
- ВведЯм $b(x)$ – портфель инвестирования (распределение вероятностей) игрока в отсутствие дополнительных сведений и $b(x|y)$ – портфель инвестирования (условное распределение вероятностей) игрока, владеющего дополнительными сведениями.
- Пусть $o(x)$ обозначает ставку букмекера на победу лошади x.

В данных обозначениях оптимальная скорость удвоения в отсутствии дополнительных сведений

$$W^*(X) = \max_{b(x)} \sum_x p(x) \log_2\{b(x)o(x)\}. \tag{6}$$

Если фиксировано значение y, то величина

$$W^*(X|y) = \max_{b(x|y)} \sum_x p(x|y) \log_2 \{b(x|y)o(x)\} \tag{7}$$

является оптимальной скоростью удвоения, когда игрок перед началом забега имеет сведения $Y = y$.

Согласно теореме 6, максимум в (6) достигается при $b(x) = p(x)$, а максимум в (7) достигается при $b(x|y) = p(x|y)$. При этом

$$W^*(X) = \sum_x p(x) \log_2 \{p(x)o(x)\}, \quad W^*(X|y) = \sum_x p(x|y) \log_2 \{p(x|y)o(x)\}.$$

Следовательно, среднее (т.е. усредненное по распределению $p(y)$) значение увеличения скорости удвоения

$$\Delta W = \sum_y p(y) \left[W^*(X|y) - W^*(X)\right] =$$

$$= \sum_{x,y} p(x,y) \left[\log_2 \{p(x|y)o(x)\} - \log_2 \{p(x)o(x)\}\right] =$$

$$= \sum_{x,y} p(x,y) \log_2 \frac{p(x|y}{p(x)} =$$

$$= \sum_{x,y} p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y}{p(x)p(y)} = I(X,Y).$$

Теорема 7 доказана.

6 Выводы

В этом заключительном разделе мы даем сводку основных определений и результатов описанных в данной работе.

6.1 Скорость удвоения и лог-оптимальный портфель

Величина

$$W(\mathbf{b}, F) = E(\log_2 \mathbf{b}^t X) = \int \log_2 \mathbf{b}^t \mathbf{x} \, dF(\mathbf{x})$$

называется *скоростью удвоения* (doubling rate) рынка ценных бумаг с распределением относительных стоимостей акций $F = F(\mathbf{x})$ и инвестиционным портфелем $\mathbf{b}$.

Оптимальной скоростью удвоения называется величина

$$W^*(F) = \max_{\mathbf{b}} W(\mathbf{b}, F),$$

а портфель $\mathbf{b}^* = b^*(F)$, на котором достигается максимум $W(\mathbf{b}, F)$, называется *лог-оптимальным портфелем* инвестирования.

Если S_n^* обозначает рост дохода за n дней при лог-оптимальном портфеле, то с вероятностью 1 существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 S_n^* = W^*(F).$$

6.2 Выпуклость

Скорость удвоения $W(\mathbf{b}, F)$ выпукла вверх как функция аргумента $\mathbf{b}$,

6.3 Условия лог-оптимальности

1. Портфель $\mathbf{b}^*$ является лог-оптимальным тогда и только тогда, когда

$$E\left(\frac{X_i}{\mathbf{b}^{*t}\mathbf{X}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если} b_i^* > 0, \\ \leq 1, & \text{если} b_i^* = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

2. Математическое ожидание отношения дохода при произвольном фиксированном портфеле инвестирования $\mathbf{b}$ к доходу при лог-оптимальном портфеле инвестирования не превосходит 1, т.е.

$$E\left(\frac{S}{S^*}\right) \leq 1.$$

6.4 Увеличение скорости удвоения

Пусть распределение $G = G(\mathbf{x})$ на рынке ценных бумаг имеет плотность $f = f(\mathbf{x})$.

1. Если вместо лог-оптимального портфеля $\mathbf{b}^*(F)$ используется лог-оптимальный портфель $\mathbf{b}^*(G)$, для другого распределения $G = G(\mathbf{x})$ с плотностью $g = g(\mathbf{x})$, то соответствующая потеря скорости удвоения

$$\Delta W = W(\mathbf{b}^*(F), F) - W(\mathbf{b}^*(G), F)$$

удовлетворяет неравенству

$$\Delta W \leq D(f\|g) = \int f(\mathbf{x}) \log_2 \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x},$$

в правую часть которого входит величина $D(f\|g)$, назывемая расстоянием Кульбака между распределениями F и G

2. Пусть случайная величина Y, называемая дополнительными сведениями о рынке ценных бумаг $\mathbf{X}$, связана с $\mathbf{X}$ совместной плотностью распределения $f(\mathbf{x}, y)$, которая считается известной инвестору. Отметим, что маргинальные плотности $f(\mathbf{x})$,

$f(y)$ и условная плотность $f(\mathbf{x}|Y=y)$ вычисляются по плотности совместного распределения:

$$f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}, y)\, dy, \quad f(y) = \int f(\mathbf{x}, y)\, d\mathbf{x}, \quad f(\mathbf{x}|Y=y) = \frac{f(\mathbf{x}, y)}{f(y)}.$$

В начале дня инвестору сообщается значение случайной величины $Y = y$ и он в этот день вместо лог-оптимального портфеля для плотности $f(\mathbf{x})$ применяет лог-оптимальный портфель для плотности $f(\mathbf{x}|Y=y)$. Обозначим через $\Delta W_{Y=y}$ увеличение скорости удвоения, которого инвестор достигает за счет дополнительных сведений $Y=y$, и введем усредненное увеличение

$$\Delta W = \int_y f(y) \Delta W_{Y=y}\, dy.$$

Справедливо неравенство

$$\Delta W \leq I(\mathbf{X}, Y) = \int_{\mathbf{x}} \int_y f(\mathbf{x}, y) \log_2 \frac{f(\mathbf{x}, y)}{f(\mathbf{x}) f(y)}\, d\mathbf{x} dy,$$

в правую часть которого входит взаимная информация $I(\mathbf{X}, Y)$ [4] пары случайных величин $(\mathbf{X}, Y)$.

6.5 Тотализатор на скачках

Пусть $\mathsf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ –распределение вероятностей номера лошади, победившей в забеге, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ –портфель игрока, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ –портфель букмекера, где $o_i = 1/r_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ –ставка букмекера за победу i-ой лошади.

1. Используя обозначение расстоянием Кульбака

$$D(\mathsf{p}||\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{p_i}{b_i},$$

скорость удвоения капитала игрока, участвующегов тотализаторе на скачках, записывается ввиде

$$W(\mathbf{b}, \mathsf{p}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 b_i o_i = D(\mathsf{p}||\mathbf{r}) - D(\mathsf{p}||\mathbf{b}),$$

т.е. игрок может добиться выигрыша в тотализаторе на скачках, тогда и только тогда, когда $D(\mathsf{p}||\mathbf{b}) < D(\mathsf{p}||\mathbf{r})$. При этом лог-оптимальный портфель $\mathbf{b}^* = \mathsf{p}$

2. Если игрок тотализатора на скачках располагает дополнительными сведениями Y о результате забега $\mathbf{X}$, то для лог-оптимального портфеля ставок игрока возникающее за счет этих сведений среднее значение увеличения скорости удвоения ΔW совпадает с информацией $I(\mathbf{X}, Y)$.

Литература

[1] J. Kelly. *"A new interpretation of information rate". Bell Sys. Tech. Journal, 35, 917-926, 1956.*
[2] A. Barron and T.M. Cover. "A bound on financial value of information". IEEE Trans. Inform. Theory, IT-34: 1097-1100, 1988.
[3] T.M. Cover, J.A. Thomas, "Elements of Information Theory", J.Willey, New York, 1991.
[4] Р.Г. Галлагер. еория информации и надЯжная связъ@"Теория информации и надЯжная связъ". М., Советское радио, 1974.