А.Г. Дьячков

Содержание спецкурса "Теория информации"

§1. Введение

1. Теоретико-информационная блок-схема, сообщение источника и кодовые слова, линейное кодирование, скорость кода.

2. Канал связи, формулировки прямой и обратной теорем Шеннона, метод случайного кодирования.

3. Математическая модель задачи поиска, теорема Шеннона для модели поиска А.Реньи.

§2. Передача дискретных сообщений по двоичному каналу связи

1. Кодирование, декодирование, вероятность ошибки кода. Декодирование по минимуму расстояния (МР-декодирование) и декодирование по максимуму правдоподобия (МП-декодирование) для данного кода.

2. Оптимальность МП-декодирования для равновероятных сообщений.

3. Вероятность ошибки в двоичном симметричном канале без памяти (ДСК) и в канале с равновесным шумом (КРШ) для двух кодовых слов.

4. Логарифмическая асимптотика $\binom{N}{t}$, основанная на неравенствах Стирлинга:

$$\log N! = N \log \frac{N}{e} + \frac{1}{2} \log 2\pi N + S(N), \quad 0 < S(N) < \frac{\log e}{12N}.$$

5. Теорема о больших уклонениях для для испытаний Бернулли.

6. Прямая теорема Шеннона для КРШ.

§3. Теоремы кодирования для комбинаторной модели двоичного канала с ошибками

1. Нижняя граница исчерпывания для $M(N, D)$- объЯма максимального кода длины N с расстоянием D.
2. Нижняя граница случайного кодирования для $M(N, D)$.
3. Граница случайного кодирования для $M(N, D)$ в ансамбле равновесных кодов.
4. Нижняя граница Варшамова-Гильберта (ВГ) для скорости $R(d)$ оптимального кода с расстоянием $D \sim dN$.
5. Верхняя граница Хэмминга для $R(d)$.
6. Верхняя граница Плоткина для $R(d)$.
7. Линейный двоичный код и его кодовое расстояние.
8. Код Хэмминга, его оптимальность.
9. Линейный код с проверкой на четность, его оптимальность.
10. Граница ВГ для линейного кода.

§4. Модель статического поиска А. Реньи

1. Обратная и прямая теоремы Шеннона для (M, k)-планов.
2. Построение оптимальных (M, k)-планов.
   (a) Конструкции, основанные на q-ных однородных разделяющих матрицах.

(b) Конструкции, основанные на непересекающихся разбиениях конечного множества.

§5. Обратная теорема Шеннона для дискретного канала связи

1. Свойства энтропии и информации:

   (a) $H(X \mid Y) \leq H(X) \leq \log \mid X \mid$.

   (b) $J(X;Y) = J(Y;X) = H(Y) - H(Y \mid X) = H(X) - H(X \mid Y) = H(X) + H(Y) - H(X;Y) \geq 0$.

   (c) $J(X;Y|Z) = H(Y|Z) - H(Y|X,Z) \geq 0$.

   (d) $J(X;Y_1,Y_2) = J(X;Y_1)+J(X;Y_2|Y_1)$, $J(X;Y_1^N) = \sum_{n=1}^N J(X;Y_n|Y_1^{n-1})$.

   (e) $J(X;f(Y)) \leq J(X;Y)$.

   (f) Если $p(y|x,z) = p(y|x)$, то $J(Y;X|Z) \leq J(Y;X)$. Если $p(x|z) = p(x)$, то $J(Y;X|Z) \geq J(Y;X)$.

   (g) *Неравенство Фано*: если $\Pr\{X \neq Y\} = \epsilon$, то $H(X|Y) \leq \epsilon \log |X| + h(\epsilon)$.

   (h) $H(Y_1^N) \leq \sum_{n=1}^N H(Y_n)$.

   (i) Если $p(y_1^N|x_1^N) = \prod_{n=1}^N p(y_n|x_n)$, то

$$H(Y_1^N|X_1^N) = \sum_{n=1}^N H(Y_n|X_n); J(X_1^N;Y_1^N) \leq \sum_{n=1}^N J(X_n;Y_n).$$

2. Теорема переработки данных для дискретного канала связи.

3. Пропускная способность дискретного канала без памяти (ДКБП).

4. Вычисление пропускной способности ДСК $C = \log 2 - h(p)$.

5. Нижняя граница ϵ-энтропии сообщения с равновероятными значениями.

6. Обратная теорема Шеннона для ДКБП.

7. Обратная теорема Шеннона для КРШ.

8. Математическая модель передачи дискретного сообщения по ДКБП с обратной связью.

9. Теорема переработки данных для ДКБП с обратной связью.

10. Пропускная способность ДКБП с обратной связью.

§6. Прямая теорема Шеннона для ДКБП

1. Пороговое декодирование для ДКБП, декодирующая функция порогового декодера для ДСК.

2. Вероятность ошибки порогового декодера для ДКБП.

3. Граница случайного кодирования ддя вероятности ошибки порогового декодера.

4. Прямая теорема Шеннона о средней вероятности ошибки ДКБП.

5. Прямая теорема Шеннона о максимальной вероятности ошибки ДКБП.

6. Теорема о больших уклонениях для суммы независимых дискретных одинаково распределенных случайных величин.

7. Вывод экспоненциальной границы вероятности ошибки для ДКБП с помощью теоремы о больших уклонениях.

8. Выпуклость вверх информационной функции $\mathbf{J}(\mathbf{Q}, \mathbf{W})$ по входному распределению $\mathbf{Q}$.

9. Выпуклость вниз информационной функции $\mathbf{J}(\mathbf{Q}, \mathbf{W})$ по условному рапределению $\mathbf{W}$.

§7. Последовательные планы поиска

1. Асимптотика длины последовательного (M, k)-плана для модели поиска А. Реньи.

2. Префиксный код, кодовое дерево, неравенство Крафта.

3. Обратная и прямая теоремы Шеннона для префиксных кодов.

4. Теорема кодирования для алфавитного кода.

5. Границы минимально возможного числа последовательных групповых проверок в булевой модели поиска m дефектов среди M объектов:
$$\log_2 \binom{M}{m} \leq N_{\text{пос}}(m; M) \leq m \log_2 M.$$

6. Оценка среднего числа групповых проверок для биномиальной модели поиска дефектов.

§8. Лог-оптимальные портфели инвестирования на рынке ценных бумаг

1. Скорость удвоения капитала на рынке ценных бумаг и лог-оптимальный портфель инвестирования.

2. Выпуклость скорости удвоения и условия лог-оптимальности.

3. Рынок ценных бумаг с дополнительной информацией.

4. Тотализатор на скачках.