УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Задачи формального характера

Истинностные значения формул

1. Найдите все интерпретации, в которых указанные формулы принимают одинаковые истинностные значения:

1. $\neg P\to(P\to Q)$, $P\vee\neg Q$;
2. $\neg(P\to Q)$, $P\&\neg Q$;
3. $P\leftrightarrow Q\vee\neg P$, $Q\to P$;
4. $P\to(Q\to R)$, $P\&R\to\neg Q$;
5. $(P\to Q)\vee(Q\to P)$, $\neg P\&\neg Q$;
6. $P\leftrightarrow R\&\neg Q$, $(R\downarrow Q)\to P$;
7. $P\leftrightarrow Q$, $Q\to(P\vee\neg Q\to P)$;
8. $(P\mid Q)\vee\neg R$, $(\neg P\downarrow R)\to Q$.
9. $P\&Q\to R$ и $P\&(Q\to R)$;
10. $P\leftrightarrow Q\vee R$ и $(P\leftrightarrow Q)\vee R$;

Равносильные формулы. Распознавание типа формул

2. Без построения истинностных таблиц докажите общезначимость формул:

1. $\neg P\to(P\to Q)$;
2. $(P\vee Q\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\to Q)$;
3. $(\neg P\to\neg Q)\leftrightarrow(Q\to P)$;
4. $(P\&Q\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(Q\to P)$;
5. $P\&Q\to R\leftrightarrow P\&\neg R\to\neg Q$;

Без построения истинностных таблиц докажите невыполнимость формул:

6. $A\&\neg(A\&B)\&B$;
7. $(A\leftrightarrow B)\&B\&\neg A$;
8. $\neg(A\to(B\to A\&B))$;
9. $A\to(B\to C)\&A\&B\&\neg C$;
10. $(A\leftrightarrow B)\&\neg(B\leftrightarrow A)\vee(B\leftrightarrow A)\&\neg(A\leftrightarrow B)$;

3. Определите тип формулы:

1. $Q\vee R\to(P\vee Q\to P\vee R)$;
2. $P\vee P\&Q\leftrightarrow\neg P$;
3. $\neg(P\to(P\to Q\leftrightarrow Q))$;
4. $(P\to Q)\to((P\to(Q\to R))\to(P\to R))$;
5. $P\&Q\leftrightarrow P\downarrow R$;
6. $(P\&Q\to R)\leftrightarrow(P\to(Q\to R))$;
7. $P\downarrow Q\leftrightarrow(\neg P\to Q)$;
8. $\neg(\neg P\&Q\&(P\vee R))$;
9. $P\mid P\to R\vee Q$;
10. $(P\to Q)\&\neg P\to\neg Q$;

II. Задачи содержательного характера

4. Выявите структуру сложных высказываний, укажите, из каких простых высказываний они образованы и с помощью каких логических связок. Напишите формулу языка нулевого порядка, формализующую данное высказывание. Постройте его отрицание, и это отрицание сформулируйте на обычном языке:

1. Если завтра выпадет снег, мы пойдем в лес на лыжах и возьмем с собой собаку.
2. Тот, кто ясно мыслит, четко говорит.
3. Он — образованный человек и неправда, что у него неважная память.
4. Здесь холодно, и было бы хорошо, если бы ты закрыл окно.
5. Геометрия Евклида непротиворечива, но геометрия Лобачевского также непротиворечива.
6. Если свет имеет волновую природу, то, когда он представляется в виде потока частиц (корпускул), допускается ошибка.
7. Если данное число делится на 6, то оно делится на 2 и делится на 3.
8. Если данное число делится на 8, то оно является четным или делится на 16.
9. Если вы были в Париже, то вы видели Лувр или видели Эйфелеву башню.
10. Если говоришь неправду, то либо ошибаешься, либо обманываешь.
11. Если какое-то вещество нагревать, оно расплавится или испарится, но оно может также взорваться.
12. Тот, кто изучал геометрию, знает теорему Пифагора или, во всяком случае, слышал о ней, а если эта теорема ему неизвестна, ему нетрудно будет понять ее.
13. Если у меня хорошее настроение и есть свободное время, то я иду в кино или гуляю по городу;
14. Если ночью пройдет дождь, то я пойду по грибы или поеду на рыбалку;
15. Если у меня есть свободное время, то я навещаю друзей и мы идем в кино или на дискотеку;

16. Потух свет, или, если пришел Коля, то он что-то ремонтирует;
17. Если я иду в кино или на каток, то у меня нет занятий в школе;
18. Если я поздно приду на остановку и не смогу сесть в автобус, то опоздаю на занятия и не запишу лекции;

5. Определите, какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:

1. Наличие аттестата зрелости достаточно для поступления в университет;
2. Наличие аттестата зрелости необходимо для поступления в университет;
3. Периодичность — достаточное условие всякой тригонометрической функции;
4. Периодичность — необходимое свойство всякой тригонометрической функции;
5. Непрерывность — необходимое и достаточное свойство всякой тригонометрической функции;
6. Для существования действительного логарифма числа необходимо и достаточно, чтобы это число было действительным и положительным;
7. Для того чтобы натуральное число p было простым, необходимо и достаточно, чтобы число p + 1 было четным;
8. Для того чтобы медиана треугольника была равна половине стороны, которую она делит пополам, необходимо и достаточно, чтобы она выходила из прямого угла;
9. Для того чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были равны и перпендикулярны;
10. Для того чтобы в прямоугольном треугольнике катет составлял половину гипотенузы, необходимо и достаточно, чтобы угол, лежащий против этого катета, был равен 30°;

6. Если справедлива теорема «Если А, то В», то говорят, что условие А достаточно для В, а условие В необходимо для А. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если..., то...»:

1. Для того чтобы функция была дифференцируемой в некоторой точке, необходимо, чтобы она была непрерывной в этой точке;
2. Необходимым свойством прямоугольника является равенство его диагоналей;
3. Для делимости многочлена f(x) на линейный двучлен x- a достаточно, чтобы число a было корнем этого многочлена;
4. На 5 делятся те целые числа, которые оканчиваются цифрой 0 или цифрой 5;
5. Две прямые на плоскости тогда параллельны, когда они перпендикулярны одной и той же прямой;
6. Комплексные числа равны, только если равны соответственно их действительные и мнимые части;
7. Всякое квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет не более двух действительных корней;
8. Четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого;
9. Равенство треугольников есть достаточное условие их равновеликости;
10. Для делимости произведения на некоторое число достаточно, чтобы по меньшей мере один из сомножителей делился на это число.

I. Задачи формального характера

Проверка истинности логических следований

7. Являются ли правильными данные следования:

1.	$A, B \models A\&B$;	$A\leftrightarrow B, B \models A$;	6.	$A\leftrightarrow B \models B\to A$;	$A\&B \models B$;
2.	$A\to B, \neg A \models \neg B$;	$A\leftrightarrow B \models \neg A\to \neg B$;	7.	$A\to B \models \neg A\to \neg B$;	$P\&Q, P \models \neg Q$;
3.	$A\leftrightarrow B \models A\to B$;	$A\to B \models B\to A$;	8.	$A\leftrightarrow B, \neg A \models \neg B$;	$A \models A\vee B$;
4.	$A\&B \models A$;	$A\leftrightarrow B \models B\leftrightarrow A$;	9.	$A\to B \models \neg B\to \neg A$;	$A\&B, \neg A \models \neg B$;
5.	$A\to B, \neg B \models \neg A$;	$A\leftrightarrow B \models \neg B\to \neg A$.	10.	$A\leftrightarrow B, \neg B \models \neg A$;	$B \models A\vee B$;

II. Задачи содержательного характера

8. Определите, имеет ли место отношение логического следования между приведенными посылками и заключением:

11. Я пойду или в кино на новую кинокомедию, или на занятия по математической логике. Если я пойду в кино на новую кинокомедию, то я от всей души посмеюсь. Если я пойду на занятия по математической логике, то испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений. Следовательно, или я от всей души посмеюсь, или испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений. Если на улице холодно и сыро, мы не пойдем в лес; мы пойдем в лес; значит, на улице не холодно или на улице не сыро.

12. Если цех II не будет участвовать в выпуске нового образца продукции, то не будет участвовать и цех I. Если же цех II будет участвовать в выпуске нового образца, то в этой работе непременно должны быть задействованы цехи I, III. Необходимо ли участие цеха III, если в выпуске нового образца будет участвовать цех I? Если на улице холодно, мы пойдем в кино; мы пойдем в кино; следовательно, на улице холодно.
13. Если Антон ляжет спать сегодня поздно, то утром он будет в нерабочем состоянии. Если он ляжет не поздно, то ему будет казаться, что он много времени теряет бесполезно. Следовательно, или Антон завтра будет в нерабочем состоянии, или ему будет казаться, что он много времени теряет напрасно.
14. Если я пойду завтра на первое занятие, то должен буду рано встать, а если я пойду вечером на дискотеку, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно и встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Следует ли отсюда, что я должен или пропустить завтра занятие, или не ходить вечером на дискотеку?
15. Если будет холодно, то я надену теплое пальто, если рукав будет починен. Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следует ли отсюда, что я не надену теплое пальто?
16. Если Петров поедет в Москву, то Иванов поедет в Киев. Петров поедет в Москву или в Кострому. Если Петров поедет в Москву, то Семенов останется в Москве. Но Семенов не останется в Москве. Значит, Иванов поедет в Киев.
17. Андрей или очень переутомился, или болен. Если он переутомился, то он раздражается. Он не раздражается. Следует ли отсюда, что он не болен?
18. Если 2 — простое число, то 2 — наименьшее простое число. Если 2 — наименьшее простое число, то 1 не является простым числом. Следует ли отсюда, что 2 — наименьшее простое число? Следует ли отсюда, что 2 — простое число?

I. Предикаты. Задачи содержательного характера

9. Рассмотреть в модели $M = \langle A; Q^{(2)} \rangle$ все варианты квантификации переменных предиката Q. Определить истинность получаемых выражений, если

1. $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, Q(x,y) \Leftrightarrow$ "x делится на y";
2. $A = \mathbb{N}, Q(x,y) \Leftrightarrow$ "x делится на y";
3. $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, Q(x,y) \Leftrightarrow$ "x имеет общий делитель с y";
4. $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, Q(x,y) \Leftrightarrow$ " x, y делятся на 3";
5. $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, Q(x,y) \Leftrightarrow$ " x, y − четные числа ";
6. $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, Q(x,y) \Leftrightarrow$ "$x \leq y$";
7. $A = \mathbb{N}, Q(x,y) \Leftrightarrow$ "$x \leq y$";
8. $A = \mathbb{Z}, Q(x,y) \Leftrightarrow$ "$x \leq y$";
9. $A = P(B)$, B – непустое множество, $Q(x,y) \Leftrightarrow$ "$x \subset y$";
10. A =P(B), B – непустое множество, Q(x, y) ⇔ "x пересекается с y";
11. A – множество студентов одной группы, Q(x, y) ⇔ "x знаком с y";
12. A – множество людей, Q(x, y) ⇔ "x знаком с y";
13. A – множество людей, Q(x, y) ⇔ "x любит y";
14. A – множество людей, Q(x, y) ⇔ " x родитель y";

Множество истинности предиката

Множеством истинности предиката $P(x_1, x_2, \dots,, x_n)$, заданного над множествами $M_1, M_2, \dots M_n$, называют совокупность всех упорядоченных n -ок $(a_1, a_2, \dots,, a_n) \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \dots,, a_n)$.

10. Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных над указанными множествами:

1. «x кратно 3», $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;
2. « x кратно 3», $M = \{3, 6, 9, 12\}$;
3. « x кратно 3», $M = \{2, 4, 8\}$;
4. «$x^2 + 4 > 0$», $M = R$;
5. «$sinx > 1$», $M = R$;
6. «$x^2 + x - 6 = 0$», $M = R$;
7. «$x_1^2 + x_2^2 = 0$», $M_1 = M_2 = R$;

8. «$x_1 < x_2$», $M_1 = \{1,2,3,4,5\}$, $M_2 = \{3,5,7\}$;
9. «x_1 делит x_2», $M_1 = M_2 = \{2,3,4,6\}$;
10. «$|x_1| + x_2 > 12$», $M_1 = \{-2,4,8\}$, $M_2 = \{0,7,9,11\}$;
11. «$x_1 + x_2 < 0$», $M_1 = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, $M_2 = \{-3,1,2\}$.

11. Изобразите на координатной прямой или на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:

1. $(x > 2) \wedge (x < 2)$;
2. $(x > 2) \vee (x < 2)$;
3. $(x > 2) \leftrightarrow (x < 2)$;
4. $(x \geq 0) \wedge (y \leq 0)$;
5. $(x \geq 0) \vee (y \leq 0)$;
6. $(x \geq 0) \rightarrow (y \leq 0)$;
7. $(|x| < 3) \wedge (x \geq 2)$;
8. $(\sin x > 0) \wedge (|x - 2| < 5) \wedge (lg\ x > 1)$;
9. $(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 > 1) \leftrightarrow (xy < 0)$;
10. $(|x| > 2) \rightarrow (|y| < 3)$;
11. $(x > 2) \rightarrow (y \leq 2)$;
12. $(x > 0) \leftrightarrow (y < 0)$.

Применение логики предикатов к логико-математической практике

12. Перевести на формальный язык:

1.	Ни одному лысому не нужна расческа.	Все моряки боятся пиратов.	Определение монотонной последовательности;
2.	Все мои тетки не справедливы.	Для любого натурального числа существует большее, делящееся на n.	Определение равномерной непрерывности функции на множестве.
3.	Ни один кошмарный сон не приятен.	Так как 60 делится на 2 и на 3, то 60 делится на некоторые числа, отличные от 60.	Определение непрерывности функции в точке;
4.	Все битвы сопровождаются страшным шумом.	Для делимости целого числа на 8 необходима делимость на 4.	Определение предела функции в точке;
5.	Не все двоечники ленивы.	Так как 60 делится на 2, 3, 4, 5, 6, то 60 делится на любое натуральное число.	Определение функции, стремящейся к бесконечности в точке;
6.	Каждый, кто упорно работает, добивается успеха.	Все решения уравнения $\mathrm{x}^2 + \mathrm{ax} + \mathrm{b} = 0$ действительны и лежат в $(0,1)$.	Определение периодической функции;
7.	Ни один бездельник не станет знаменитостью.	Некоторые решения уравнения $\mathrm{x}^2 = -1$ комплексны.	Определение четной функции;
8.	Некоторые художники не бездельники.	Все решения уравнения $\mathrm{x}^2 = -1$ иррациональны.	Определение возрастающей функции
9.	Некоторые бездельники не художники.	Не все решения уравнения $\sin 5\mathrm{x} = 0$ иррациональны.	Определение фундаментальной последовательности (или последовательности Коши);
10	Некоторые подушки мягкие.	При некоторых отрицательных x f(x) принимает рациональные значения.	Определение ограниченной последовательности сверху;
11	Тот, кто может укрощать крокодилов, заслуживает уважения.	Квадратные корни из некоторых рациональных положительных чисел иррациональны.	Определение предела последовательности (сходящейся последовательности);
12	Ни одна лягушка не имеет поэтической внешности.	Некоторые комплексные числа, отличные от 0 и являющиеся значениями функции f, не положительны и не отрицательны.	Определение нечетной функции;
13	Ни одна тачка не комфортабельна.	Логарифмы всех положительных рациональных чисел иррациональны.	Определение монотонной функции;
14	Всякий орел умеет летать.	Маленькие девочки боятся зубных врачей.	Определение убывающей функции;
15	Некоторые свиньи не умеют	Все первокурсники и	Определение локального

	летать.	второкурсники пришли на лекцию.	минимума функции;
16.	Некоторые свиньи — не орлы.	Некоторые школьники — отличники или спортсмены.	Определение ограниченной последовательности снизу;
17.	Ни один судья не справедлив.	Некоторые индейцы были храбрее белых.	Определение ограниченной последовательности;
18.	Ни один ребенок не любит прилежно заниматься.	Зайцы не всегда глупее лис.	Определение точки экстремума;
19.	Все шутки для того и предназначены, чтобы смешить людей.	Некоторые зубные врачи боятся маленьких девочек.	Определение максимума функции;
20.	Ни один парламентский акт не шутка.	Все жулики боятся милиционеров.	Определение непериодической функции;

13. Переведите на естественный язык:

1. $\exists x, y, z\ (З(x)\ \&\ З(y)\ \&\ З(z)\ \&\ x \neq y\ \&\ y \neq z\ \&\ x \neq z) \Rightarrow \forall x\ З(x)$. З(x) — “x знает тайну”.
2. $\forall x(x \neq a\ \&\ x \neq b \Rightarrow f(x) \neq 0)$.
3. $\forall x(f(x) = 0 \Rightarrow x = a \vee x = b)$.
4. $\exists x, y\ \forall z(Д(B, z) \Rightarrow z = x \vee z = y)$. B — Ваня, Д — дружит.
5. $\exists x, y\ (Д(В, x)\ \&\ Д(В, y)\ \&\ \forall z(z \neq x\ \&\ z \neq y\ )\ \neg Д(В, z)))$. Обозначения те же, что и в 4.
6. $\forall x\ (Ч(x) \Rightarrow \exists y\ (Ч(y)\ \&\ \forall z\ (Л(x, z)\ \&\ Л(z, x) \Leftrightarrow y = z)))$. Ч(x) — “x – человек”, Л —любить.
7. $\forall x, y, z(x \neq y\ \&\ y \neq z\ \&\ x \neq z \Rightarrow f(x) \neq 0 \vee f(y) \neq 0 \vee f(z) \neq 0)$.
8. $\forall x(Ч(x) \Rightarrow \forall y(x \neq y \Rightarrow \neg Ч(y)))$. Ч —“быть чемпионом”.
9. $\exists x\ (Ч(x)\ \&\ \forall y(Ч(y) \Rightarrow y = x))$. Обозначение то же, что в 8.
10. $\forall x\ \forall y \forall z(x \in X\ \&\ y \in X\ \&\ z \in X \Rightarrow x = y \vee y = z \vee x = z)$.

14. Пусть L – множество людей, где f – соответствие, которое для предикатных символов E(x, y), P(x, y), Ch(x, y) , S (x, y), D(x, y), F (x, y) , Dc (x, y) , C(x, y), H (x, y) , Wf (x), M (x) , W (x) определяет предикаты:

$E(x, y)$	x и y - один и тот же человек		$C(x, y)$	x и y – супруги
$Ch(x, y)$	x ребенок y		$H(x, y)$	x муж y
$P(x, y)$	x родитель y		$Wf(x, y)$	x жена y
$S(x, y)$	x сын y		$M(x)$	x – мужчина
$D(x, y)$	x – дочь		$W(x)$	x – женщина
$F(x, y)$	x предок y		$Dc(x, y)$	x потомок y

Записать в модели $M = \langle L;\ f \rangle$ формулы, выражающие следующие утверждения:

1.	некоторые супруги имеют детей;	$M = \langle L;\ E, P, C, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, S, D, H \rangle$
2.	x– шурин (брат жены);	$M = \langle L;\ E, F, H, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, P, H, M, W \rangle$
3.	x– деверь (брат мужа);	$M = \langle L;\ E, F, C, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, S, D, Wf \rangle$
4.	x– незаконнорожденный	$M = \langle L;\ E, P, Wf, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, F, Wf, M, W \rangle$
5.	у каждого есть отец и мать;	$M = \langle L;\ E, Ch, C, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, Dc, C, M, W \rangle$
6.	у каждого есть дедушка;	$M = \langle L;\ E, Ch, H, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, Dc, H, M, W \rangle$
7.	у каждого есть бабушка;	$M = \langle L;\ E, Ch, Wf, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, Dc, Wf, M, W \rangle$
8.	x– невестка (жена сына);	$M = \langle L;\ E, Ch, C, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, S, D, C \rangle$
9.	x– зять (муж дочери);	$M = \langle L;\ E, P, C, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, S, D, H \rangle$
10.	x– свекровь (мать мужа);	$M = \langle L;\ E, F, H, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, P, H, M, W \rangle$
11.	x– свекор (отец мужа);	$M = \langle L;\ E, F, C, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, S, D, Wf \rangle$
12.	x– теща (мать жены);	$M = \langle L;\ E, P, Wf, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, F, Wf, M, W \rangle$
13.	x– тесть (отец жены);	$M = \langle L;\ E, Ch, C, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, Dc, C, M, W \rangle$
14.	x внебрачная дочь y;	$M = \langle L;\ E, Ch, H, M, W \rangle$	$M = \langle L;\ E, Dc, H, M, W \rangle$