ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Минимизация булевых функций

Постановка задачи

Не секрет, что законы функционирования системы описываются логическими (*булевыми*) функциями. Один и тот же закон можно реализовать функциями, имеющими различное число знаков, соединенных различными логическими операциями. СНФ (совершенные нормальные формы) хотя и дают однозначные представления функции, но являются очень громоздкими. Реализация СНФ программно или схемотехнически является избыточной, что ведет к увеличению программного кода, поэтому существуют методы упрощения логической записи – минимизации.

Определение. Преобразование логических функций с целью упрощения их аналитического представления называются *минимизацией*.

Существуют два направления минимизации:

1. Кратчайшая форма записи (цель – минимизировать ранг каждого импликанта). При этом получаются *кратчайшие формы* КДНФ, ККНФ, КПНФ.
2. Получение *минимальной формы* записи (цель – получение минимального числа символов для записи всей функции сразу).

P.S.: При этом следует учесть, что ни один из способов минимизации не универсален!

Минимизация функций проводится обычно в классе ДНФ, но возможна и в КНФ. В основу положены два закона:

Закон склеивания	$xA \vee x\overline{A} = x$
Закон поглощения	$xA \vee x = x$

где A - произвольная булева функция, x- отдельный знак.

Определение. Нормальная форма (дизъюнктивная или конъюнктивная) данной функции называется *минимальной*, если количество букв, которое она содержит, будет не больше, чем в любой другой ее нормальной форме.

P.S.: Обратите внимание, что речь идет о минимальном числе букв, а не переменных. Например, $f(x,y,z) = xz \vee \overline{x}yz \vee \overline{y}z$ содержит 7 букв, но 3 переменных.

Некоторые функции имеют несколько минимальных форм. Они могут быть найдены специальными способами, которым и посвящена данная работа.

Некоторые необходимые понятия

Определение. *Термом* называется логическая переменная или ее отрицание.

Определение. *Элементарной конъюнкцией* называется терм или конъюнкция термов. Количество переменных в конъюнкции называется ее *рангом*.

Определение. Булева функция $g(x)$ называется импликантой булевой функции $f(x)$, если для любого набора аргументов, на которых $g(x) = 1$, $f(x)$ также равна единице.

$x\,y\,z$	$f(x,y,z)$
000	1
001	1
010	0
011	0
100	1
101	0
110	1
111	1

P.S.: Простейшими примерами импликант могут служить элементарные конъюнкции, входящие в ДНФ данной функции. Произвольная дизъюнкция этих термов также является импликантой функции.

Пример: для $f(\tilde{x}) = V(0,1,4,6,7)$, т.е. импликантами являются xyz; $xy\overline{z}$; $\overline{x} \cdot \overline{y}$; и т.д.

Определение. *Простой* (первичной) *импликантой* булевой функции называется такая импликанта функции, у которой никакая ее собственная часть уже не является импликантой этой функции.

P.S.: Под собственной частью импликанты понимается новая импликанта, полученная из исходной, путем вычеркивания произвольного числа букв.

Для данного примера функции простыми импликантами являются: $\bar{x} \cdot \bar{y}, xy, \bar{y} \cdot \bar{z}$.

Определение. Говорят, что булева функция имеет сокращенную *дизъюнктивную нормальную форму*, если она равна дизъюнкции всех своих простых импликант.

Сокращенная форма характеризуется тем, что ее члены самые короткие, из нее уже нельзя исключать ни одной буквы, но можно выбросить некоторые импликанты.

Определение. Если из сокращенной формы исключить все возможные члены, не нарушая определения функции, то получится *тупиковая дизъюнктивная нормальная форма*.

Тупиковых форм у булевой функции может быть несколько.

Определение. Тупиковая форма, содержащая наименьшее число членов, называется *кратчайшей дизъюнктивной нормальной формой*.

P.S.: Кратчайшая и тупиковые формы в общем случае не совпадают.

Схема упрощения формы булевой функции

Таблица истинности

СДНФ

Сокращенная ДНФ

Тупиковая ДНФ

Минимальные ДНФ

Кратчайшие ДНФ

P.S.: Заметим, что минимизацию можно проводить по числу букв, что соответствует минимизации числа входов, любо элементарных логических элементов преобразователя (контактов реле, диодов), либо по числу членов, что соответствует минимизации числа функциональных элементов преобразователя.

Методов минимизации булевых функций существует много. Мы рассмотрим наиболее простые и распространенные.

1. Геометрический

Геометрический метод основан на кубическом представлении булевых функций. В кубическом представлении булевой функции от n переменных все множество из 2^n наборов ее аргументов рассматривается как множество координат вершин -мерного куба с длинной ребра, равной 1. В соответствии с этим наборы аргументов, на которых булева функция принимает значение равное 1 принято называть *существенными* вершинами.

Существенные вершины образуют так называемые 0-кубы (ноль-кубы). Между 0-кубами существует отношение соседства и определена операция склеивания. Два 0-куба называются *соседними*, если они отличаются только по одной координате.

Пример : Пусть $n = 4$. Тогда 0101 и 0001 - два соседних 0-куба. Результатом их склеивания будет 1-куб: 0*01.

Определение. Склеивание 2-х соседних 0-кубов дает в результате 1-куб. Координата, отмечаемая символом «*», называется *свободной* (независимой, несвязанной), а остальные координаты называются *зависимыми* (связанными).

Аналогичное отношение соседства существует между 1-кубами, в результате склеивания которых получается 2-куб (0*01 и 0*11 ⇒ 0**1).

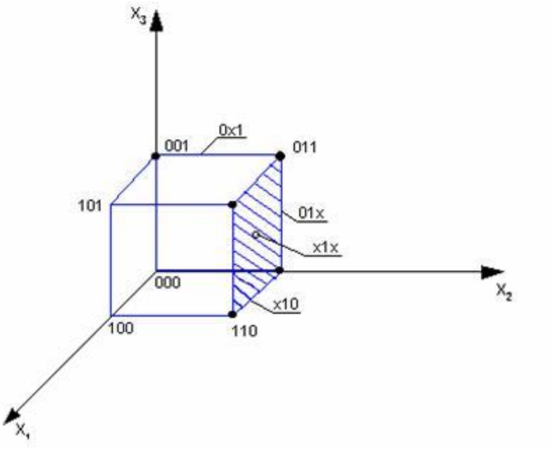
Определение. Два -куба называются *соседними*, если они отличаются только по одной (зависимой) координате. r-куб содержит r независимых и $(n - r)$ зависимых координат. В результате склеивания 2-х соседних -кубов образуется $(r + 1)$ $-$куб содержащий $(r + 1)$ независимую координату.

P.S.: Операция склеивания над кубами соответствует применению закона склеивания к конъюнктивным термам, отождествляемым с этими кубами.

Применяется он в основном для минимизации функций двух или трех переменных, но его можно обобщить на любое количество переменных. Для трех метод нагляден. Поэтому ограничимся лишь этим случаем.

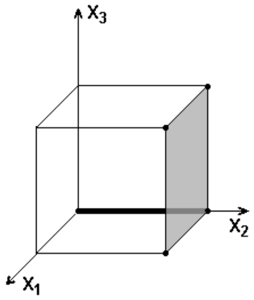
Изобразим область определения произвольной булевой функции трех переменных – это вершины трехмерного куба. Геометрическим местом 0-куба является точка, представляющая существенную вершину. Два соседних 0-куба являются концами какого-либо ребра. Геометрическим местом 1-куба является ребро, замыкаемое склеивающимися 0-кубами, образующими данный 1-куб. Два параллельных ребра, образующих грань, являются образами склеивающихся 1-кубов. В соответствии с этим геометрической интерпретацией 2-куба является грань, образуемая парой параллельных ребер. Так как любую грань можно определить одной из пар параллельных ребер, 2-куб может быть получен как результат склеивания двух различных пар 1-кубов, то есть представляется в двух экземплярах. Геометрическим образом 3-куба можно считать 3-х мерный куб. Так как он может быть образован 3-мя способами как пара параллельных граней, то при склеивании он получается в трех экземплярах.

Элементам куба можно поставить во взаимо-однозначное соответствие элементарные конъюнкции различного ранга: вершинам куба – конъюнкции третьего ранга, ребрам – второго, граням – первого. Каждый геометрический эквивалент меньшей размерности покрывается всеми геометрическими эквивалентами большей размерности. Конъюнкции большего ранга покрываются конъюнкциями меньшего ранга (см. рисунок).



Так, например, конъюнкции $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$ и $\overline{x}_1x_2x_3$ покрываются конъюнкцией $\overline{x_1} \cdot x_3$. Конъюнкции $x_1x_2x_3$, $\overline{x}_1x_2x_3$, $x_1x_2\overline{x}_3$, $\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$ покрываются либо двумя конъюнкциями $x_2\overline{x}_3$ и $\overline{x}_1x_2$, либо только x_2 (четыре вершины, либо два ребра, либо одна грань).

Пример: Минимизировать функцию, заданную вектором $f(x_1, x_2, x_3) = (10110011)$.



Ее формула в СДНФ имеет вид: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee\vee\, x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$

Отметим на чертеже существенные вершины. Заметим, что четыре вершины лежат в одной грани x_2, а две на одном ребре $\overline{x}_1\overline{x}_3$. Откуда следует, что минимальная форма функции и есть сумма этих импликант, т.е. $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$. Другого варианта решения здесь не может быть. Задача решается однозначно.

2. Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод может быть применен для булевых функций от любого числа переменных, однако, для простоты его описания рассмотрим минимизацию функции, зависящей от трех переменных.

Представим функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде следующей ДНФ:

$$\begin{aligned}
f(x_1x_2x_3) = {} & K_1^1 x_1 \vee K_1^0 \overline{x}_1 \vee K_2^1 x_2 \vee K_2^0 \overline{x}_2 \vee K_3^1 x_3 \vee K_3^0 \overline{x}_3 \vee \\
& \vee K_{12}^{11} x_1 x_2 \vee K_{12}^{10} x_1 \overline{x}_2 \vee K_{12}^{01} \overline{x}_1 x_2 \vee K_{12}^{00} \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee \\
& \vee K_{13}^{11} x_1 x_3 \vee K_{13}^{10} x_1 \overline{x}_3 \vee K_{13}^{01} \overline{x}_1 x_3 \vee K_{13}^{00} \overline{x}_1 \overline{x}_3 \vee \\
& \vee K_{23}^{11} x_2 x_3 \vee K_{23}^{10} x_2 \overline{x}_3 \vee K_{23}^{01} \overline{x}_2 x_3 \vee K_{23}^{00} \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \\
& \vee K_{123}^{111} x_1 x_2 x_3 \vee K_{123}^{110} x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee K_{123}^{101} x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{100} x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \\
& \vee K_{123}^{011} \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee K_{123}^{010} \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee K_{123}^{001} \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{000} \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3
\end{aligned}$$

Здесь представлены все возможные конъюнктивные члены, которые могут входить в $f(x_1, x_2, x_3)$. Коэффициенты K с различными индексами являются неопределенными и подбираются так, чтобы полученная форма была минимальной. Если задать наборы аргументов, подставить в формулу и приравнять полученные выражения (отбрасывая нулевые конъюнкции) значению функции на выбранных наборах, то получим систему уравнений для определения коэффициентов K. В общем случае в системе будет 2^n уравнений, n - число аргументов функции.

$$\begin{cases}
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = f(1,1,1) \\
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} = f(1,1,0) \\
K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} = f(1,0,1) \\
K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = f(1,0,0) \\
K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = f(0,1,1) \\
K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} = f(0,1,0) \\
K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} = f(0,0,1) \\
K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = f(0,0,0)
\end{cases}$$

Так как функция $f(x_1, x_2, x_3)$ всюду определена, то в правой части соответствующих уравнений стоят нули и единицы. Из определения дизъюнкции следует, что все коэффициенты K, входящие в уравнения, в правой части которых стоит нуль, необходимо приравнять нулю. В остальных уравнениях необходимо вычеркнуть вошедшие в них нулевые коэффициенты. После этого удобно полученную систему переписать в более сокращенной форме, оставив в ней уравнения с единичной правой частью, убрав при этом все нулевые коэффициенты. Среди оставшихся уравнений выбирают наиболее короткие и в них приравнивают единице коэффициенты, определяющие конъюнкции наименьшего ранга (это возможно, т.к. дизъюнкция равна единице при обращении в единицу хотя бы одного члена). При этом надо выбрать такие конъюнкции наименьшего ранга, которые чаще встречаются в уравнениях системы. Остальные коэффициенты можно положить равными 0 или 1. Затем рассматривают оставшиеся уравнения и в них выбирают коэффициенты, соответствующие конъюнкциям наименьшего ранга по тому же принципу, и т.д.

Найденные единичные коэффициенты определяют имлпиканты с наименьшим числом знаков, а форма, записанная с этими коэффициентами, определяет минимальную ДНФ данной функции.

Пример: Минимизировать функцию, заданную вектором $f(x_1, x_2, x_3) = (10110011)$.

Составим систему (обратите внимание на то, что она имеет стандартный вид).

P.S.: Для удобства записи системы слева помещают координаты вершин (область определения функции). Верхние индексы коэффициентов комбинируют соответственно из записанных координат вершин с учетом взятых нижних индексов.

$$\begin{array}{c|l}
000 & K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\
001 & K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} = 0 \\
010 & K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} = 1 \\
011 & K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = 1 \\
100 & K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 0 \\
101 & K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} = 0 \\
110 & K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1 \\
111 & K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1
\end{array}$$

Из уравнений 2, 5, 6 в силу свойств дизъюнкции вытекает, что $K_1^0 = K_2^0 = K_3^0 = K_1^1 = K_3^1 = K_{12}^{00} = K_{12}^{10} = K_{13}^{01} = K_{13}^{10} = K_{13}^{11} = K_{23}^{00} = K_{23}^{01} = K_{123}^{101} = K_{123}^{001} = K_{123}^{100} = 0$

Удобно вычеркнуть уравнения, в правой части которых стоят нули, а в остальных уравнениях вычеркнуть коэффициенты равные нулю.

После этого система примет вид:

$$\begin{cases}
K_{13}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\
K_2^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} = 1 \\
K_2^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = 1 \\
K_2^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1 \\
K_2^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1
\end{cases}$$

Из первого же уравнения системы в силу свойства дизъюнкции $1 \vee A = 1$ возьмем $K_{13}^{00} = 1$. Тогда первое и второе уравнения обращаются в тождества. В третьем, четвертом и пятом уравнениях единице можно приравнять коэффициент $K_2^1 = 1$. Все остальные коэффициенты во всех уравнениях положим равными нулю.

$$K_{12}^{01} = K_{12}^{11} = K_{13}^{00} = K_{23}^{10} = K_{23}^{11} = K_{123}^{000} = K_{123}^{010} = K_{123}^{011} = K_{123}^{110} = K_{123}^{111} = 0$$

P.S.: Обратите внимание на тот факт, что единице приравнивают коэффициенты, отвечающие конъюнкциям, содержащим наименьшее число переменных, кроме того, чаще встречающиеся в упрощенной системе уравнений.

Итак, мы нашли $K_2^1 = 1, K_{13}^{00} = 1$, остальные коэффициенты равны нулю. Отсюда минимальная форма данной функции: $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$.

P.S.: Этот метод является громоздким, практически не используется, но мы рассмотрели его здесь с целью обоснования последующих методов.

3. Метод минимизирующих карт Карно

Этот метод по существу представляет собой тот же метод неопределенных коэффициентов, только записанный в более удобной форме.

Рассмотрим следующую таблицу

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
x_1	x_2	$\overline{x}_3$	x_1x_2	$x_1\overline{x}_3$	$x_2\overline{x}_3$	$x_1x_2\overline{x}_3$
x_1	$\overline{x}_2$	x_3	$x_1\overline{x}_2$	x_1x_3	$\overline{x}_2x_3$	$x_1\overline{x}_2x_3$
x_1	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
$\overline{x}_1$	x_2	x_3	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1x_3$	x_2x_3	$\overline{x}_1x_2x_3$
$\overline{x}_1$	x_2	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_3$	$x_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$
$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	x_3	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$\overline{x}_1x_3$	$\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$
$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$

Эта таблица служит более компактной записью системы уравнений метода неопределенных коэффициентов, где вместо коэффициентов K в соответствующей клетке записываются сами конъюнкции. Каждая строка таблицы заменяет собою соответственно 1-е, 2-е, …, 8-е уравнения системы. Дизъюнкция всех элементов строки таблицы есть значение функции в вершине, определяемой соответствующими переменными. Таким образом, первая строка есть значение функции в вершине (111), четвертая - в (100).

Определение. Приведенная таблица называется *минимизирующей картой*. Обычно эти карты отпечатаны для соответствующего числа переменных.

Минимизация функции производится по следующим правилам:

Все строки таблицы, которые соответствуют конъюнкциям последнего столбца, отсутствующим в СДНФ данной функции ($f(\tilde{x}) = 0$), вычеркивают.

В столбцах оставшихся строк вычеркивают все элементы, попавшие в вычеркнутые строки.

В каждой из невычеркнутых строк выбирают незачеркнутую конъюнкцию, содержащую минимальное число знаков (желательно, чтобы выбранные конъюнкции встречались чаще во всех оставшихся строках).

Взяв по одной конъюнкции для всех незачеркнутых строк и записав их дизъюнкцию, получают минимальную форму.

Заметим, что нахождение МДНФ неоднозначно, ибо произволен выбор минимальных конъюнкций в строках. Однако, все получаемые по этому методу МДНФ будут “*одинаково минимальны*”.

Пример: Минимизировать функцию, заданную вектором $f(x_1, x_2, x_3) = (10110011)$.

Ее СДНФ имеет вид: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee\vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3$.

Строим для функции минимизирующую карту и работаем с ней по описанному алгоритму.

Отметим справа от последнего столбца те конъюнкции, которые входят в СДНФ данной функции. Вычеркнем неотмеченные строки, затем вычеркнем в остальных строках (действуя по столбцам) те элементы, которые попали в вычеркнутые строки. Во 2-ом столбце (с одной переменной) положим $x_2 = 1$, при этом остальные элементы строк (1, 2, 5, 6 строки), где стоит элемент x_2, положим равными нулю. В строке 8 положим элемент $\bar{x}_1\bar{x}_3 = 1$, $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = 0$.

$\cancel{x_1}$	$\boxed{x_2}$	$\cancel{x_3}$	$\boxed{x_1x_2}$	$\cancel{x_1x_3}$	$\boxed{x_2x_3}$	$\boxed{x_1x_2x_3}$	✓
$\cancel{x_1}$	$\boxed{x_2}$	$\cancel{\bar{x}_3}$	$\boxed{x_1x_2}$	$\cancel{x_1\bar{x}_3}$	$\boxed{x_2\bar{x}_3}$	$\boxed{x_1x_2\bar{x}_3}$	✓
x_1	$\bar{x}_2$	x_3	$x_1\bar{x}_2$	x_1x_3	$\bar{x}_2x_3$	$x_1\bar{x}_2x_3$	
x_1	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2$	$x_1\bar{x}_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	
$\cancel{\bar{x}_1}$	$\boxed{x_2}$	$\cancel{x_3}$	$\boxed{\bar{x}_1x_2}$	$\cancel{\bar{x}_1x_3}$	$\boxed{x_2x_3}$	$\boxed{\bar{x}_1x_2x_3}$	✓
$\cancel{\bar{x}_1}$	$\boxed{x_2}$	$\cancel{\bar{x}_3}$	$\boxed{\bar{x}_1x_2}$	$\boxed{\bar{x}_1\bar{x}_3}$	$\boxed{x_2\bar{x}_3}$	$\boxed{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3}$	✓
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	x_3	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1x_3$	$\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	
$\cancel{\bar{x}_1}$	$\cancel{\bar{x}_2}$	$\cancel{\bar{x}_3}$	$\cancel{\bar{x}_1\bar{x}_2}$	$\boxed{\bar{x}_1\bar{x}_3}$	$\cancel{\bar{x}_2\bar{x}_3}$	$\boxed{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}$	✓

Итак, получим МДНФ данной функции в виде: $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$.

P.S.: Сравните с результатами, полученными геометрическим методом и методом неопределенных коэффициентов.

4. Метод Квайна

Этот метод применим к функции, записанной в СДНФ. Решение задачи минимизации булевой функции методом Квайна и усовершенствованным методом Квайна-МакКласски базируется на понятиях импликант.

В отношении импликант булевой функции также как и в отношении кубов, соответствующих им, существует отношение покрытия.

Принято считать ,что импликанта покрывает некоторую существенную вершину или в общем случае некоторый куб, если значение импликанты на наборе аргументов, представляющем данную существенную вершину, равно 1 или в общем случае значение импликанты равно 1 для всех существенных вершин, покрываемых кубом.

Пример: импликанта x_1x_2 покрывает существенные вершины (110, 111) и в свою очередь покрывает куб «11*».

Определение. Множество импликант булевой функции образует *полную систему импликант* (является покрытием булевой функции),если любая существенная вершина булевой функции покрывается хотя бы одной импликантой этого множества.

Если считать ,что в полную систему импликант включаются импликанты только в виде конъюнкций и не включаются импликанты в виде дизъюнкций,то полной системе импликант можно поставить в соответствие некоторое множество кубов, образующих покрытие булевой функции f.

Определение. Система простых импликант называется *приведенной*, если она является полной и никакая ее собственная часть уже не образует полную систему импликант.

Минимизация функции проводится поэтапно.

1 этап. Нахождение первичных импликант.

Все конъюнкции СДНФ данной функции (0-кубы) сравнивают между собой попарно, применяя закон склеивания $xA \vee \overline{x}A = A$. Удобно члены функции занумеровать и расположить в таблице.

Члены $f(x_1, x_2, x_3)$	Результаты 1-го склеивания	Результаты 2-го склеивания	…
1.	1.	1.	
2.	2.	2.	
3.	3.	3.	
…	…	…	
…	…	…	
…	…	…	

1-й член последовательно сравнивается со всеми остальными. Результаты склеивания записываются во 2-й столбец, указывая в скобках номера склеенных членов, а склеенные члены 1-го столбца отметить звездочкой «*». Ранг полученных конъюнкций на единицу ниже (1-кубы), т.е. они содержат на один знак меньше. Эти конъюнкции нумеруются, затем операцию повторяют, записывая результат в 3-й столбец и т.д. Заканчивают эту процедуру когда вновь полученные конъюнкции уже не склеиваются между собой. Если в результате склеивания получаются одинаковые импликанты, то оставляют только одну из них. Все неотмеченные знаком «*» конъюнкции являются *первичными* (*простыми импликантами*). Все отмеченные конъюнкции будут поглощены простыми импликантами (закон поглощения $A \vee AB = A$). Все простые импликанты в таблице обводятся рамками.

Дизъюнкция всех простых импликант дает сокращенную ДНФ данной функции. Далее необходимо перейти к тупиковой ДНФ. Это уже 2-й этап.

2 Этап. Расстановка меток

Составляется таблица, число строк которой равно числу найденных простых импликант, а число столбцов – числу членов СДНФ данной функции. В 1-й столбец записываются первичные импликанты, в 1-ю строку все 0-кубы функции. Если 0-куб функции покрывается простой импликантой, то на пересечении их строки и столбца ставится метка «V».

У простых импликант 3-го порядка метки удобно проставить по номерам склеенных членов 1-го столбца, приписанным у импликант рядом (в скобках), а у первичных импликант 2-го порядка по номерам членов 1-го столбца. Число меток в строке зависит от числа исключенных букв в импликанте. Для k исключенных букв число меток будет 2^k.

3 этап. Нахождение существенных импликант

Если в каком-либо столбце составленной таблицы меток имеется только одна метка, то первичная импликанта, стоящая в соответствующей строке, является существенной. Она не может быть исключена из минимальной формы функции, т.к. без нее не может быть получено покрытие всего множества импликант данной функции. Из таблицы меток исключаются строки и столбцы, на пересечении которых стоит эта единственная метка.

4 этап. Вычеркивание лишних столбцов

Если в таблице после 3-го этапа два одинаковых столбца (в которых метки стоят в одинаковых строках), то один из них вычеркивается, т.к. покрытие оставшегося столбца будет осуществлять покрытие выброшенной исходной импликанты.

5 этап. Вычеркивание лишних строк

Если в таблице после 4-го этапа появились строки в которых нет ни одной метки, то их вычеркивают, т.е. первичные импликанты, соответствующие им, исключаются из минимальной формы функции, т.к. они не покрываются оставшихся исходных импликант.

6 этап. Выбор минимального покрытия

Исследуем таблицу, полученную после всех предыдущих этапов (см. 3-й этап). Выбирается такая совокупность первичных импликант, которая бы имела метки во всех столбцах. Предпочтение отдается варианту покрытия с минимальным числом букв в первичных импликантах, образующих покрытие.

*P.S.: **1.** В методе Квайна есть одно существенное неудобство – необходимость полного попарного сравнения на этапе нахождения первичных импликант. С ростом числа аргументов функции и определяющих ее членов СДНФ растет число этих сравнений. Этот рост характеризуется фактариальной функцией. Поэтому применение Метода Квайна становится затруднительным.*

__2.__ По методу Квайна получаются тупиковые формы. Их может быть несколько. Среди них и надо искать минимальные формы. Все возможные минимальные формы можно найти по методу Патрика.

Пример: Минимизировать функцию, заданную вектором $f(x_1, x_2, x_3) = (10110011)$.

Поместим все 0-кубы функции $f(x_1, x_2, x_3) = (10110011)$ в 1-й столбец таблицы и занумеруем их. Применим закон склеивания, результат запишем во 2-й столбец таблицы, снова занумеруем их, склеенные члены 1-го столбца отметим звездочками, и т.д.

	0-кубы $f(x_1, x_2, x_3)$	**Результаты 1-й склейки**	**Результаты 2-й склейки**
1.	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ *	$\boxed{\bar{x}_1\bar{x}_3 \ (1, 2)}$	$\boxed{x_2 \ (2, 5)}$
2.	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3$ *	$\bar{x}_1 x_2$ * (2, 3)	$\cancel{x_2 \ (3, 4)}$
3.	$\bar{x}_1 x_2 x_3$ *	$x_2 x_3$ * (2, 4)	
4.	$x_1 x_2\bar{x}_3$ *	$x_2\bar{x}_3$ * (3, 5)	
5.	$x_1 x_2 x_3$ *	$x_1 x_2$ * (4, 5)	

Несклеившиеся простые импликанты обводим рамочкой. Дизъюнкция их дает сокращенную ДНФ. В данном примере 1-й этап приводит к цели. $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$ есть минимальная форма функции. В общем случае надо перейти от сокращенной формы к тупиковой, а затем к минимальной.

Пример: Минимизировать функцию, заданную вектором $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0001\ 1101\ 0101\ 1100)$.

СДНФ имеет вид

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee$$
$$\vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee$$
$$\vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee$$
$$\vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

Запишем 0-кубы функции в 1-й столбец таблицы, применим к ним закон склеивания. Результаты запишем во 2-й столбец таблицы, занумеруем их, укажем в скобках номера склеенных членов, а в 1-ом столбце склеившиеся члены пометим звездочками. Повторим эту процедуру с членами 2-го столбца и т.д. Те импликанты, которые не склеиваются, обведем рамками, они будут являться простыми импликантами.

	0-кубы $f(x_1, x_2, x_3)$	**Результаты 1-й склейки**	**Результаты 2-й склейки**
1.	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, x_4$ *	$\boxed{\bar{x}_1, x_3, x_4 \quad (1, 4)}$	$\boxed{x_2 \bar{x}_3 \quad (3, 9)}$
2.	$\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ *	$\boxed{\bar{x}_2, x_3, x_4 \quad (1, 6)}$	$\cancel{x_2 \bar{x}_3 \quad (4, 6)}$
3.	$\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, x_4$ *	$\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3$ * (2, 3)	
4.	$\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4$ *	$x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ * (2, 7)	
5.	$x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_4$ *	$\boxed{\bar{x}_1, x_2, x_4 \quad (3, 4)}$	
6.	$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4$ *	$x_2, \bar{x}_3, x_4$ * (3, 8)	
7.	$x_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ *	$\boxed{x_1, \bar{x}_2, x_4 \quad (5, 6)}$	
8.	$x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4$ *	$\boxed{x_1, \bar{x}_3, x_4 \quad (5, 8)}$	
9.		$x_1, x_2, \bar{x}_3$ * (7, 8)	

Итак, 1-й этап («Нахождение простых импликант») закончен. Ими являются все импликанты, обведенные рамками.

Рассмотрим 2-5-й этапы. Составим таблицу.

	$\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_3,x_4$ (1)	$\bar{x}_1,x_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4$ (2)	$\bar{x}_1,x_2,\bar{x}_3,x_4$ (3)	$\bar{x}_1,x_2,x_3,x_4$ (4)	$x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,x_4$ (5)	$x_1,\bar{x}_2,x_3,x_4$ (6)	$x_1,x_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4$ (7)	$x_1,x_2,\bar{x}_3,x_4$ (8)
$\bar{x}_1, x_3, x_4$	V			V				
$\bar{x}_2, x_3, x_4$	V					V		
$\bar{x}_1, x_2, x_4$			V	V				
$x_1, \bar{x}_2, x_4$					V	V		
$x_1, \bar{x}_3, x_4$					V			V
$\boxed{x_2, \bar{x}_3}$		V	V				V	V

Заметьте, член $x_2 \bar{x}_3$ получился при склеивании членов 3 и 9, 2-го столбца, а те в свою очередь из членов 2, 3 и 7, 8 1-го столбца. Так, простая импликанта $x_2 \bar{x}_3$ покрывает 2, 3, 7, 8 0-кубы данной функции. Таблица меток построена.

Столбцы 2 и 7 построенной таблицы содержат по одной метке, это значит, что импликанта $x_2 \bar{x}_3$ является существенной (этап 3). Поскольку импликанта $x_2 \bar{x}_3$

покрывает 2, 3, 7 и 8 0-кубы, то соответствующие столбцы можно вычеркнуть вместе со строкой существенной импликанты (этапы 4 и 5). После проведенных этапов получим сокращенную таблицу меток.

	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, x_4$	$\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4$	$x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_4$	$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4$
	(1)	(4)	(5)	(6)
$\boxed{\bar{x}_1, x_3, x_4}$	V	V		
$\bar{x}_2, x_3, x_4$	V			V
$\bar{x}_1, x_2, x_4$		V		
$\boxed{x_1, \bar{x}_2, x_4}$			V	V
$x_1, \bar{x}_3, x_4$			V	

В данном примере все оставшиеся простые импликанты имеют одинаковый ранг. Выберем покрытие из импликант $\bar{x}_1, x_3, x_4$ и $x_1, \bar{x}_2, x_4$, т.к. они покрывают все 4 оставшиеся 0-куба. Они и будут существенными.

Итак, из оставшихся существенных импликант записываем тупиковую форму данной функции. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4$.

Она должна быть неизбыточной. В данном примере – это и есть минимальная форма функции.

5. Метод Мак-Класки

Этот метод является модернизацией метода Квайна (его 1-го этапа). Мак-Класки предложил записывать исходные импликанты данной функции, заданной в СДНФ, в виде их двоичных кодов (каждому члену ставится в соответствие по известному правилу его собственная вершина). Все множество так записанных импликант разбивается по числу единиц в их кодах на группы(в i-ую группу войдут коды, имеющие в своей записи i единиц). Попарное сравнение импликант достаточно производить только между соседними группами, т.к. только эти группы отличаются одним знаком в кодах входящих в них членов. Сравнивая коды членов соседних групп, образуют члены низшего ранга. На месте исключенного знака пишут в них «тире».

Затем всю совокупность членов низшего ранга снова разбивают на группы по местоположению знака «тире». Снова сравнивают члены, но уже внутри групп, образуя члены низшего ранга по тому же правилу и т.д.

Далее все производится по методу Квайна, но в кодовых значениях импликант. Рассмотрим это на последнем примере.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee$$
$$\vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

Заменим исходные импликанты их кодами: 0011, 0100, 0101, 0111, 1001, 1011, 1100, 1101.

Разобъем коды исходных импликант на группы, поместим их в таблицу. Далее применим закон склеивания к членам соседних групп, перебирая каждый член 1-й группы со всеми членами 2-й группы и т.д.

Можно все это сразу делать в таблице.

Функция		Результаты 1-й склейки		Результаты 2-й склейки	
коды	группы	коды	группы	коды	группы
0011	0-я -	0-11*	1-я $\boxed{\text{1. -011}}$	$\boxed{\text{-10-}}$	
0100	1-я 1. 0100	-011*	2. -100 *	~~-10-~~	
0101	2-я 2. 0011	010-*	3. -101 *		
0111	3. 0101	0100*	2-я $\boxed{\text{4. 0-11}}$		
1001	4. 1001	01-1*	$\boxed{\text{5. 1-01}}$		
1011	5. 1100	-101*	3-я $\boxed{\text{6. 01-1}}$		
1100	3-я 6. 0111	10-1*	$\boxed{\text{7. 10-1}}$		
1101	7. 1011	1-01*	4-я 8. 010- *		
	8. 1101	110-*	9. 110- *		

Далее строится таблица меток, но в нее вписываются исходные и первичные импликанты в виде двоичных кодов. Обратите внимание, что первичные импликанты записаны в другом порядке (согласно их группам), поэтому таблица меток выглядит иначе, чем в примере 5.

	0100	0011	0101	1001	1100	0111	1011	1101
-011	V			V				
0-11	V					V		
1-01			V	V				
01-1					V	V		
10-1					V			V
-10-		V	V				V	V

Обработка таблицы меток производится по методу Квайна.

Получаем $f=(-10-)\vee(0-11)\vee(10-1)$, т.е. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_3x_4\vee x_1\bar{x}_2x_4$.

6. Метод карт Карно (диаграмм Вейча)

Этот метод наиболее удобен, т.к. позволяет упростить поиск склеивающихся членов, но он ограничен числом аргументов данной функции. Практически минимизация по методу диаграмм Вейча производится для функций с числом аргументов не более восьми $(n\le 8)$.

Карта Вейча представляет собою видоизмененную таблицу истинности функции.

Рассмотрим карту для функции 2-х переменных.

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

	$x_2=0$	$x_2=1$
$x_1=0$	1	0
$x_1=1$	1	1

$x_1 \setminus x_2$	0	1
0	1	0
1	1	1

		x_2
	1	0
x_1	1	1

Можно упростить карту, если для аргументов ввести символические обозначения чертой, поставив ее там, где они равны единице.

В карту вносятся значения функции, соответствующие наборам переменных.

Расположение клеток таблицы позволяет легко определить склеивающиеся члены. Соседние клетки соответствуют членам, отличающимся только одним знаком, т.е. их можно склеивать, если значение функции в них равно единице.

Рассмотрим карту Вейча для функции 3-х переменных. Карту будем строить с симметричным расположением аргументов, один из них расположим с одной стороны, два других – с другой. Разделим карту двумя осями, симметрично которым и будем располагать аргументы. Каждая клетка карты соответствует членам СДНФ функции третьего ранга.

x_3 x_2

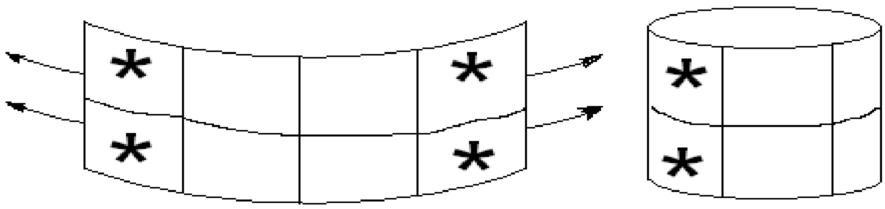
1 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	2 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	3 $\bar{x}_1x_2x_3$	4 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$
5 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	6 $x_1\bar{x}_2x_3$	7 $x_1x_2x_3$	8 $x_1x_2\bar{x}_3$

x_1

Обратите внимание, что помимо каждой пары соседних клеток, могут быть склеены любые четыре соседние клетки и все восемь.

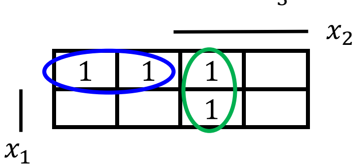
Так можно склеить клетки 1 и 5, 1 и 2 и т.д., а также 2, 3, 6 и 7; 1, 5, 4 и 8 и т.д.

Если представить карту свернутой по вертикали в цилиндр, то крайние клетки окажутся рядом, их тоже можно склеить.



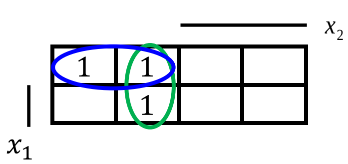
Примеры: для функций трех переменных:

1.



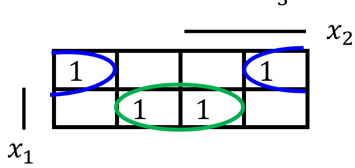
$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3$

2.



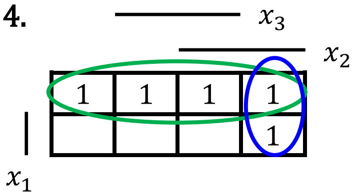
$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3$

3.



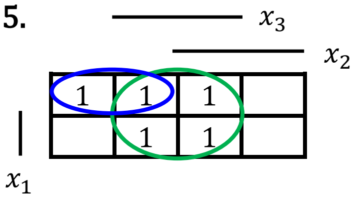
$\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3$

4.



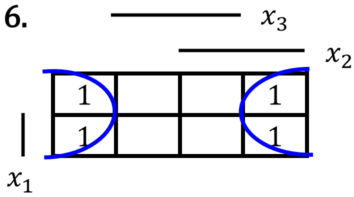
$\bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_3$

5.



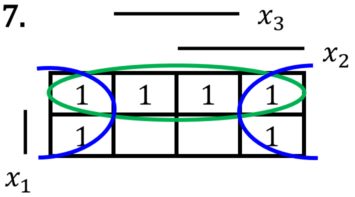
$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_3$

6.



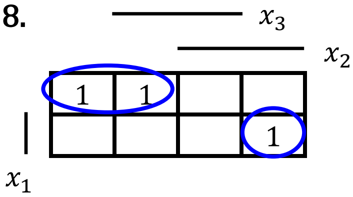
$\bar{x}_3$

7.



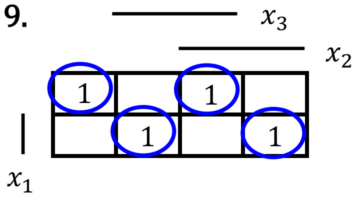
$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3$

8.



$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2x_3$

9.

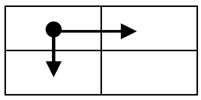


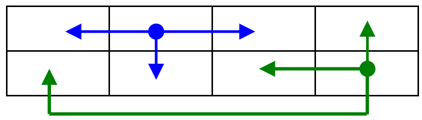
нельзя склеить

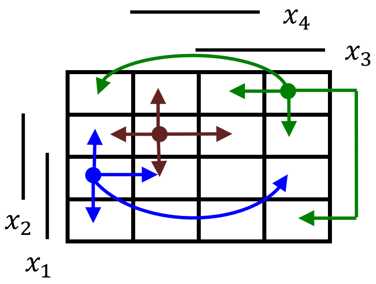
Размещение аргументов в карте Вейча может быть произвольным. Лучше располагать половину их на одной стороне другую половину на другой. Более удобен вариант с симметричным, относительно центральных осей, расположением аргументов.

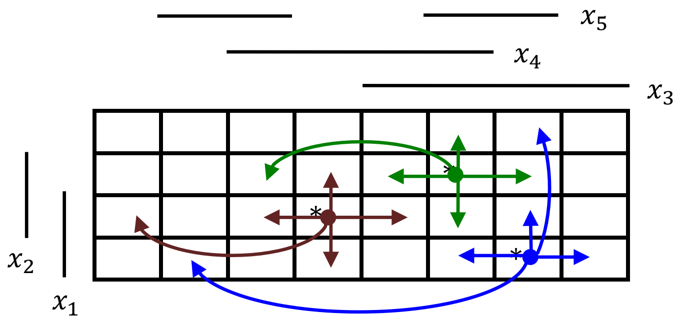
Обработка карт

Из способа построения карты с симметричным расположением аргументов ясно, что каждая клетка функции с n аргументами имеет n соседних клеток, т.е. тех клеток, с которыми можно производить склеивание.









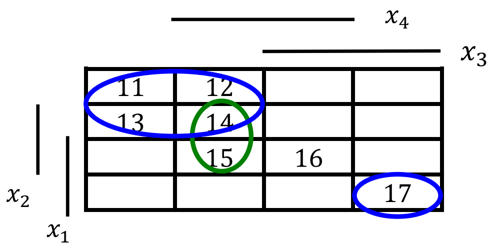
Клетки, расположенные симметрично относительно осей, являются соседними, т.е. их можно склеить. Правило симметрии не распространяется на другие методы.

В карте проставляются только значения функции, равные 1, нули не записывают. *Можно склеивать* 2^k, где $k = 2..n$ клеток, т.е. *полные строки*, *полные столбцы*, проходящие через *карту*, *полукарту*, *четверть карты* и т.д.

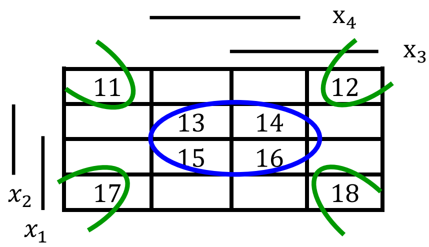
При склеивании 2^k клеток выпадает k переменных, т.е. останется $(n-k)$ переменных.

Нетрудно заметить, что простые импликанты соответствуют максимальным областям карты, т.е. таким, которые нельзя увеличить.

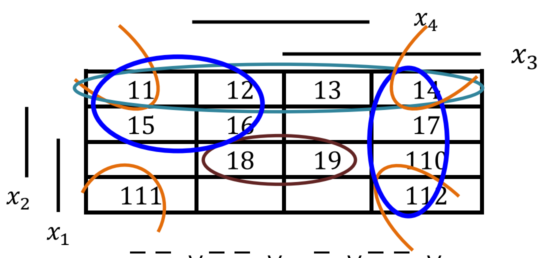
Примеры: для функций четырех переменных:



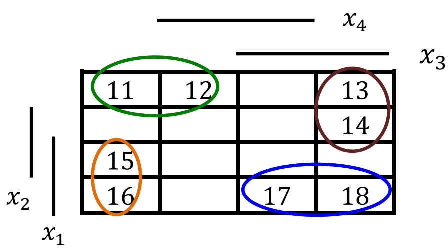
$x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$



$\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_2x_4$



$\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_4$



$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3$

Обратите внимание, что в последней карте нет смысла объединять клетки 1, 3, 6, 8, ибо оставшиеся клетки приходится объединять с ними же.

Задание на лабораторную работу

1. Записать формулу функции $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде СДНФ и минимизировать ее графическим методом, методом неопределенных коэффициентов и методом минимизирующих карт Карно. Сравнить полученные результаты.

2. Записать формулу функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ в виде СДНФ и минимизировать ее методами Квайна, Мак-Класки и диаграммами Вейча. Сравнить полученные результаты.

3. Реализовать один из методов программным образом (методы раздаются на практике преподавателем).

P.S.: В случае реализации метода неопределенных коэффициентов вывести полную и сокращенную системы, затем результат - минимальную форму; для метода Квайна вывести таблицы склеек и меток; для метода Квайна-Мак-Класки - таблицы склеек и меток.

Варианты заданий:

$f(x_1, x_2, x_3)$ **Варианты**

x_1	x_2	x_3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	0					1	1	1		1	1	1		1	1	1	1		1
0	0	1			1	1		1	1			1	1	1	1	1	1	1		
0	1	0		1			1		1	1		1				1	1	1	1	
0	1	1		1	1	1		1		1	1			1	1		1	1	1	1
1	0	0	1				1		1		1		1	1		1		1	1	1
1	0	1	1		1	1		1		1		1	1	1	1		1		1	1
1	1	0	1	1		1	1		1	1	1	1		1	1	1		1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1		1	1	1	1	1		1	1

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ **Варианты**

x_1	x_2	x_3	x_4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	0	0		1		1		1	1		1	1	1			1	1		1	
0	0	0	1	1			1	1		1		1		1		1	1		1		
0	0	1	0					1	1	1		1	1	1			1	1	1		1
0	0	1	1							1		1			1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1					1	1	1						
0	1	0	1	1		1	1	1			1	1		1		1	1	1	1		1
0	1	1	0	1	1	1	1		1	1	1		1	1	1	1	1	1	1		
0	1	1	1	1	1		1		1	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0		1	1		1	1	1	1	1	1	1		1		1		1	
1	0	0	1	1		1	1	1			1		1	1	1		1		1	1	
1	0	1	0	1	1	1	1		1		1			1	1		1	1	1		1
1	0	1	1					1	1	1	1	1			1	1				1	1
1	1	0	0	1	1	1	1			1		1	1	1			1			1	1
1	1	0	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1		1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1		1	1		1		1			1		1		1	1
1	1	1	1	1	1	1		1	1		1		1		1	1			1	1	1