МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М.Т. Калашникова»

Кафедра «Программное обеспечение»

О.Л. Макарова

Дискретная математика

методические указания для выполнения лабораторной работы №2
«Бинарные отношения»
направление 231000 «Программная инженерия»

Ижевск, 2013 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторных работ по курсу
«Дискретная математика»

Общие указания

Целью лабораторных работ является:

- закрепление теоретических знаний по дисциплине «Дискретная математика»;
- приобретение практических навыков по моделированию объектов, изучаемых в курсе, а также операций над ними.

Предлагаемые лабораторные работы проводятся со студентами всех форм обучения кафедры «Программное обеспечение» в ходе изучения курса «Дискретная математика». На первом лабораторном занятии студенты получают номер варианта на весь семестр, в соответствии с которым выполняют индивидуальные задания.

В ходе лабораторной работы студент должен ознакомиться с теоретическим материалом (см. список литературы [1-8]) и написать программу в соответствии с заданием *своего номера варианта*. За каждую выполненную работу студенту начисляется определенное количество баллов. Помимо лабораторных работ студент может выполнить дополнительные задания, за что получает соответственно *дополнительные баллы*.

Программа может быть написана на языке *Pascal* (по желанию студент может использовать языки *C*, *C++*, возможно использование среды программирования *Delphi*). Текст программы должен в *обязательном порядке содержать комментарии*.

Предварительно представить отчет по лабораторной работе можно в электронном виде по почте ol@istu.ru (в формате .doc, .docx или .pdf; дополнительно к сообщению необходимо прикрепить тексты исходных и exe-файлов). Окончательный вариант представляется студентом преподавателю в *печатном виде.*

Содержание отчета

Отчет должен соответствовать требованиям оформления документов такого типа и содержать следующие пункты:

1. Титульный лист с указанием темы лабораторной работы и номера варианта
2. Постановку задачи
3. Алгоритм решения задачи (математическая постановка)
4. Описание программы:
   - структура входных данных;
   - структура выходных данных;
   - алгоритм программы.
5. Листинг текста программы
6. Тестовые примеры
7. Выводы

Примечание: если в задании не указан метод решения задачи или структура входных данных, то выбор метода и структуры данных должен быть сделан самостоятельно студентом, обоснование выбора должно быть отражено в отчете.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
Бинарные отношения

2.1. Цель работы

Познакомиться с понятиями бинарных отношений, изучить способы их представления и свойства, научиться выполнять операции над отношениями.

2.2. Теоретические сведения

Отношение используется как термин для обозначения связи между предметами или понятиями ($a \in A$, p делится на 2). Несмотря на свое широкое применение, понятие «отношение » имеет строгое математическое определение.

2.2.1. Основные определения[1,2,3,8]

Пусть A и B — произвольные множества. *Неупорядоченная пара* на множествах A и B — это любое множество $\{a, b\}$, где $a \in A$, $b \in B$ или $b \in A$, $a \in B$. *Упорядоченная пара* на множествах A и B, обозначаемая записью (a, b), определяется не только самими элементами $a \in A$, $b \in B$, но и порядком, в котором они записаны.

Множество всех упорядоченных пар на множествах A и B называют *декартовым (прямым) произведением множеств A и B* и обозначают $A \times B$. Таким образом, $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Если множества $A = B$ равны между собой, то указанное декартово произведение называют *второй степенью множества A* (или квадратом множества A)и обозначают A^2.

Бинарное отношение R определяют как подмножество в декартовом произведении $A \times B$, задаваемое определяющим свойством отношения R. Если R такое отношение, что $R \subseteq A \times B$, то говорят, что R есть отношение из A в B. Если $A = B$, то говорят, что R есть *отношение на множестве A*.

2.2.2. Представление отношений[1,2,5,8]

Бинарные отношения можно представлять различными способами: перечислением пар, ориентированным графом (графом соответствия), графиком на координатной плоскости, функцией, матрицей отношения (смежности).

Для наглядного изображения отношений из A и B будем использовать два способа. Первый из этих способов состоит в интерпретации отношения как подмножества декартова произведения, которое можно изображать примерно так же, как на плоскости можно изображать подмножества декартова квадрата числовых множеств. Второй способ, применяемый для конечных множеств A и B, — построение так называемого графа соответствия. В этом случае элементы множеств изображаются на плоскости кружочками. Если пара (a, b) принадлежит соответствию R, то в графе соответствия из кружочка, обозначающего элемент $a \in A$, проводим стрелку к кружочку, обозначающему элемент $b \in B$. Для бинарного отношения на конечном множестве A часто удобнее использовать граф другого вида. Элементы множества A изображаются кружочками только один раз, а стрелки проводятся по тем же правилам, что и в графе соответствия. Заметим, что при таком построении возможно соединение кружочка стрелкой с самим собой (петля).

Пример 1. Пусть $A = \{a, b, c\}, B = \{1,2,3,4\}$. Отношение между множествами A и B может быть записано в явном виде: $R = \{(a, 1), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 4), (c, 2)\}$. График и граф отношения приведены на рис.2.1.

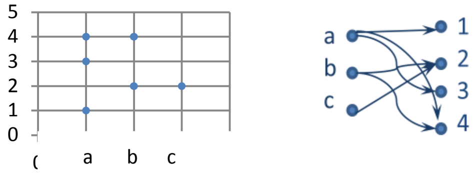


График Граф

Рис. 2.1

Пример 2. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда отношение $R = \{(x, y) | x, y \in A,\ y \vdots x\}$ может быть записано как $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4), (5,5)\}$. График и графы отношения приведены на рис.2.2.

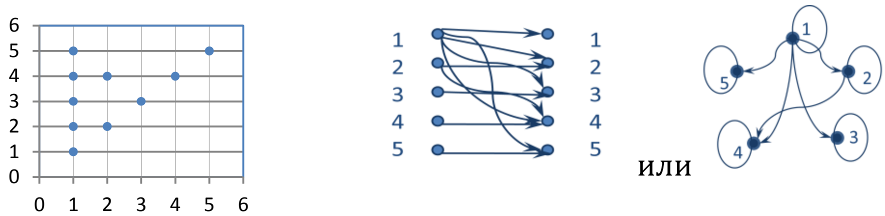


График Графы

Рис. 2.2

Для программной обработки отношений используют другое представление отношений. Пусть R есть отношение на A, $R \subset A^2$, $|A| = n$. Перенумеруем элементы множества $A = \{a_1, \dots a_n\}$. Тогда отношение R можно представить булевой матрицей $R: array\ [1..n, 1..n]\ of\ 0..1,$ где $\forall\, i, j \in [1..n](R_{ij} = a_i R a_j)$. Понятие «булева матрица» подразумевает, что элементы матрицы – булевые значения и операции над ними выполняются по соответствующим правилам. Матрицы отношений, рассмотренных в примерах, будут выглядеть:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Пример1 Пример2

2.2.3. Свойства бинарных отношений[1,2,5,8]

Отношение R называется:

- *рефлексивным*, если $\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$; *антирефлексивным*, если $\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \notin R$; иначе *нерефлексивным*.
- *симметричным*, если $\forall x, y \in A((x \neq y \text{ и } (x, y) \in R) \Rightarrow (y, x) \in R$; *антисимметричным*, если $\forall x, y \in A(((x, y) \in R \text{ и } (y, x) \in R) \Rightarrow x = y)$; *несимметричным* в противном случае.
- т*ранзитивным*, если $\forall x, y, z \in A(((x, y) \in R \text{ и } (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R)$;
- *линейным*, если $\forall x, y \in A((x, y) \in R \text{ или } (y, x) \in R \text{ или } x = y)$.

Из множества всех отношений выделяется класс отношений, одновременно симметричных, транзитивных и рефлексивных. Такие отношения называются *отношениями эквивалентности*.

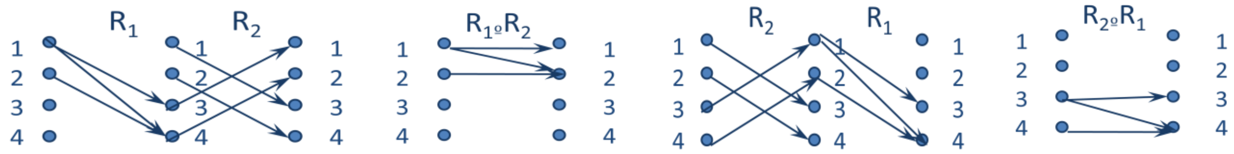
2.2.4. Операции над отношениями

Поскольку отношения можно считать множествами, то все операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение и т.д.) можно применить и к отношениям. Заметим, что, говоря о дополнении отношения из A в B, мы имеем в виду дополнение до универсального отношения из A в B, т.е. до декартова произведения $A \times B$. Естественно, что и равенство отношений можно трактовать как равенство множеств. В то же время на отношения можно распространить операции, определяемые для отображений.

Композицией (произведением) *отношений* $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq B \times C$ называют отношение $R_1 \circ R_2 = \{(x, y) | \exists b \in B : (x, b) \in R_1 \text{ и } (b, y) \in R_2\}$.

Пример 3. Пусть задано множество $A = \{1,2,3,4\}$ и заданные на нем бинарные отношения $R_1 = \{(x, y) |\ x + 1 < y\}$, и $R_2 = \{(x, y) || x - y| = 2\}$. Найдем композицию $R_1 \circ R_2$.

Имеем $R_1(1) = \{3,4\}$, $R_2(3) = \{1\}$ и $R_2(4) = \{2\}$. Следовательно, $R_1 \circ R_2(1) = R_2(3) \cup R_2(4) = \{1,2\}$. Далее $R_1(2) = \{4\}$, $R_2(4) = \{2\}$ и $R_1 \circ R_2(2) = \{2\}$. Так как $R_1(3) = R_1(4) = \emptyset$, то в итоге получим $R_1 \circ R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$. Построение композиции проиллюстрировано на рис. 2.3а.



a) b)

Рис. 2.3

Подобным образом можно построить композицию отношений$R_2 \circ R_1$, что отображено на рис. 2.3b. Легко видеть, что $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.

Пусть R — бинарное отношение. Определим *обратное отношение* R^{-1} следующим образом: $R^{-1} = \{(a, b) | (b, a) \in R\}$.

Таким образом, R^{-1} связывает те же пары элементов, что и R, но «в обратном порядке».

2.3. Порядок выполнения работы

Составить программу(ы) для решения следующих задач:

1. (1 балл) Сгенерировать множество A из N целых чисел (мощность множества N и само множество A вводятся с клавиатуры), отсекая на этапе ввода повторяющиеся элементы. Выдать множество упорядоченных пар элементов полученного множества A, отвечающих заданному отношению R.

   Входные данные: В первой строке – $1 < N < 100$. Во второй строке – элементы массива A, $1 < a[i] < 32000$

   Выходные данные: В первой строке вывести полученное множество A. Во второй строке вывести отношение R, заданное на множестве A в виде упорядоченных пар. Пары разделять пробелами. В конце строки пробел не ставить.

   Пример: $R = \{(x, y) |\ x + 1 < y\}$

Входные данные	Выходные данные
4 2 4 5 3	2 3 4 5 (2,4) (2,5) (3,5)

<table>
<tr><td>4
2 4 2 3
Был введен повторяющийся элемент.
Введите еще число: 7</td><td>2 3 4 7
(2,4) (2,7) (3,7) (4,7)</td></tr>
</table>

2. (1 балл) Используя результаты задачи 1 сгенерировать матрицу отношения R, заданного в задаче 1. При выводе матрицы предусмотреть вывод ее шапки.

   Входные данные: В первой строке –элементы массива A, $1 < a[i] < 32000$

   Выходные данные: Матрица отношения R.

   Пример: $R = \{(x, y) | \ x + 1 < y\}$

<table>
<tr><th>Входные данные</th><th>Выходные данные</th></tr>
<tr><td>2 3 4 5</td><td> | 2| 3| 4| 5

2| 0| 0| 1| 1
3| 0| 0| 0| 1
4| 0| 0| 0| 0
5| 0| 0| 0| 0</td></tr>
<tr><td>2 3 4 7</td><td> | 2| 3| 4| 7

2| 0| 0| 1| 1
3| 0| 0| 0| 1
4| 0| 0| 0| 1
7| 0| 0| 0| 0</td></tr>
</table>

3. (2 балла) Используя результаты задачи 2 определить свойства отношения R, заданного в задаче 1.

   Входные данные: Матрица отношения R.

   Выходные данные: Три строки – свойства отношения R.

   Пример: $R = \{(x, y) | \ x + 1 < y\}$

<table>
<tr><th>Входные данные</th><th>Выходные данные</th></tr>
<tr><td> | 2| 3| 4| 5

2| 0| 0| 1| 1
3| 0| 0| 0| 1
4| 0| 0| 0| 0
5| 0| 0| 0| 0</td><td>Антирефлексивно
Не симметрично
Не транзитивно</td></tr>
<tr><td> | 2| 3| 4| 7

2| 0| 0| 1| 1
3| 0| 0| 0| 1
4| 0| 0| 0| 1
7| 0| 0| 0| 0</td><td>Антирефлексивно
Не симметрично
Не транзитивно</td></tr>
</table>

4. (1 балл) Используя результаты задачи 2 найти композицию заданных отношений.

   Входные данные: Матрица отношения R.

   Выходные данные: Матрица заданной композиции.

   Пример:

Композиция	Входные данные	Выходные данные
$R \circ R$	0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
$R^{-1} \circ R$	0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1

Варианты отношения R:

1. $R = \{(x, y) |\ 2x < y\}$
2. $R = \{(x, y) |\ |x + y| < xy\}$
3. $R = \{(x, y) |\ xy < x\}$
4. $R = \{(x, y) |\ 2x \vdots y\}$
5. $R = \{(x, y) |\ x|y\}$
6. $R = \{(x, y) |\ x|(2y)\}$
7. $R = \{(x, y) |\ (x + y) \vdots 2\}$
8. $R = \{(x, y) |\ (x - y) \vdots 3\}$
9. $R = \{(x, y) |\ x - 1 = 2y\}$
10. $R = \{(x, y) |\ x - 1 \leq y\}$
11. $R = \{(x, y) |\ x \geq y + 1\}$
12. $R = \{(x, y) |\ x = y - 1\}$
13. $R = \{(x, y) |\ (x + 1) \vdots y\}$
14. $R = \{(x, y) |\ (y + 1) \vdots x\}$
15. $R = \{(x, y) |\ xy \geq y - x\}$
16. $R = \{(x, y) |\ x + 2 = y\}$
17. $R = \{(x, y) |\ (x - y) \vdots 3\}$
18. $R = \{(x, y) |\ (x + y) \vdots 5\}$

Варианты композиций:

1. $R \circ R^{-1}$
2. $R^{-1} \circ R$
3. $R \circ R$
4. $R^{-1} \circ R^{-1}$

2.4. Дополнительные задачи

1. Обратное отношение (1 балл)

Дана матрица некоторого отношения. Необходимо вывести матрицу обратного отношения.

Входные данные: В первой строке содержится мощность множества, на котором определено отношение ($1 < N < 100$). В следующих N строках – элементы матрицы отношения ($1 < R[n, n] < 32000$).

Выходные данные: Матрица обратного отношения ($1 < R^{-1}[n, n] < 32000$).

Пример:

Входные данные	Выходные данные
3 0 1 1 0 0 0 1 1 0	0 0 1 1 0 1 1 0 0
4 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0

2. **Алгоритмы и задачи (2 балла)**

Среди студентов ИжГТУ есть очень много умных ребят (особенно на кафедре ПО). Все они очень активны и помимо учебы занимаются различной деятельностью. Есть среди них очень странные личности, которые занимаются спортивным программированием. Практически все свое время посвящают ребята этому занятию. Представьте себе, иногда они пишут контесты прямо на парах! И знаете, такие упорные тренировки не проходят даром. Прорешав не одну тысячу задач, набрав несколько сотен тысяч строк кода, команда IzhSTU СупеpМуТаНТbl стала финалистом чемпионата мира! Очень важное событие в их жизни! Перед началом подготовки к финалу, решили вспомнить, какие задачи они уже умеют решать? Считается, что задачу можно решить, если знать определенный алгоритм.

Есть M задач, команда знает N алгоритмов. Для простоты ребята присвоили каждому алгоритму порядковый номер от $1..N$, а каждой задаче номер от $1..M$. После этого было решено составить таблицу $N \times M$, где на пересечении -той строки и j-ого столбца стоит 1, если задача под номером j решается с помощью алгоритма i, либо 0, если не решается. Но так как свободного времени у ребят уже не осталось, вам придется помочь команде решить это пустяковое дело.

Входные данные: В первой строке через пробел вводятся два целых числа N и M ($1 \leq N, M \leq 500$). В следующих $2 \cdot N$ строках входные данные представлены следующим образом: вводятся числа $1 \leq L \leq N$ (номер алгоритма) и $1 \leq Q \leq M$ (количество задач, решаемых с помощью этого алгоритма). В следующей строке идут Q чисел – номера задач. Гарантируется, что номера алгоритмов и задач не повторяются и всегда корректны.

Выходные данные: Матрица $N \cdot M$, описанная в условии. После каждого элемента матрицы следует выводить пробел. В конце строки пробел не ставить.

Пример:

Входные данные	Выходные данные
3 4 2 2 4 1 1 1 3 3 1 2	0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0

3. **Воспоминания о прошлом (2 балла)**

Вечер перед теплым камином. Дядюшка Джон вспоминает о своём далёком прошлом, когда у каждого был один лучший друг, а дружба была очень крепкой. Грустно стало Джону. Сейчас не то время: у большинства два или более друга и такую дружбу он называет плохой.

Вам даны некоторые равные по количеству списки людей и информация о том, кто с кем дружит. Сказано, что если первый дружит со вторым, то второй тоже дружит с первым.

Входные данные: В первой строке содержится чётное число N ($1 \leq N \leq 100$) – количество людей. В следующих строках – N имён первой группы людей и N имен второй группы. Далее – число M ($1 \leq M \leq 5050$) и в последующих M строках – M пар друзей.

Выходные данные: Если каждый из первого множества имеет единственного друга во втором множестве и наоборот, то выведите «Each person has one best friend», в противном случае – «Bad friendships».

Пример:

Входные данные	Выходные данные
4 Fred Thomas John Logan Quimby Sam Ethan Joseph 4 Fred Quimby Thomas Sam John Ethan Logan Joseph	Each person has one best friend
3 Luke Adrian Luis Adrian Besson Austin 3 Luke Adrian Adrian Besson Luis Besson	Bad friendships

Контрольные вопросы

1. Привести пример бинарного отношения, которое является:
а) рефлексивным, симметричным, но не транзитивным;
б) рефлексивным, антисимметричным, но не транзитивным;
в) рефлексивным, транзитивным, но не симметричным;
г) антисимметричным, транзитивным, но нерефлексивным.
2. Пусть A и B — конечные множества, содержащие n и k элементов. Сколько существует различных соответствий из A в B? Сколько можно задать функций из A в B, а среди последних — инъекций? При каких k и n существуют биекции и сколько их?
3. Построить графики и графы следующих бинарных отношений, заданных на множестве $X = \{1,2,3,4,5,6\}$:
а) $x_1 R x_2$, если $x_1 < x_2 + 1$; в) $x_1 R x_2$, если $|x_1 - x_2| \geq 3$;
б) $x_1 R x_2$, если $x_1 \leq x_2$ г) $\{(a,b) | a+b -$ четное$\}$.
4. Определить, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладают следующие бинарные отношения:
а) $R = \{(a,a),(a,b),(c,a),(b,d),(a,d),(b,c)\}$ на множестве $M = \{a,b,c,d\}$;
б) R_n, такое, что xR_ny, если $x - y$ делится на n, где $x, y \in \mathbb{Z}$, а $n \in \mathbb{Z}$ – фиксировано.
5. Доказать тождества:
а) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
б)$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B, C и D отрезки числовой прямой.

2.5. Литература

1. *Новиков, Ф. А.* Дискретная математика для программистов : учеб. для вузов. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2005. – 364 с.
2. *Хаггарти, Р.* Дискретная математика для программистов : учеб. пособие. – 2-е изд. – М. : Техносфера, 2005. – 400 с.
3. *Судоплатов, С. В.* Дискретная математика : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – 2-е изд. – Москва ; ИНФРА-М ; Новосибирск : НГТУ, 2005. – 256 с.
4. *Дейкстра. Э.* Дисциплина программирования. – М.: Мир, 1978. – 280 с.
5. *Кнут Д.* Искусство программирования, том 1, выпуск 2. Основные алгоритмы. : Пер. с англ. - М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2007. – 682 с.

6. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 703 с.
7. *Кнут Д.* Искусство программирования, том 2, выпуск 2. Получисленные алгоритмы. : Пер. с англ. - М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2007. – 788 с.
8. *Иванов Б.Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы : учеб. пособие. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001 – 288 с.