Глава

11

Нейронные сети и ...

Нейронные сети и статистика. Нейронные сети и нечеткая логика. Нейронные сети и экспертные системы. Нейронные сети и статистическая физика.

> 🕮 Животные делятся на: а) принадлежащих Императору, б) набальзамированных, в) прирученных, г) сосунков, д) сирен, е) сказочных, ж) отдельных собак, з) включенных в эту классификацию, и) бегающих, как сумасшедшие, к) бесчисленных, л) нарисованных тончайшей кистью из верблюжьей шерсти, м) прочих, н) разбивших цветочную вазу, о) издали напоминающих мух.
> **Х.Л.Борхес, *Аналитический язык Джона Уилкинса***

Нейрокомпьютинг имеет многочисленные точки соприкосновения с другими дисциплинами и их методами. В частности, теория нейронных сетей использует аппарат статистической механики и теории оптимизации. Области приложения нейрокомпьютинга подчас сильно пересекаются или почти совпадают со сферами применения математической статистики, теории нечетких множеств и экспертных систем. Связи и параллели нейрокомпьютинга чрезвычайно многообразны и свидетельствуют о его *универсальности*. В данной главе, которую можно рассматривать как дополнительную, так как она требует несколько большей математической подготовки, мы поговорим только о наиболее важных из них.

Нейронные сети и статистика

Поскольку в настоящее время нейронные сети с успехом используются для анализа данных, уместно сопоставить их со старыми хорошо разработанными статистическими методами. В литературе по статистике иногда можно встретить утверждение, что наиболее часто применяемые нейросетевые подходы являются ни чем иным, как *неэффективными* регрессионными и дискриминантными моделями. Мы уже отмечали прежде, что многослойные нейронные сети действительно могут решать задачи типа регрессии и классификации. Однако, во-первых, обработка данных нейронными сетями носит значительно более многообразный характер - вспомним, например, активную классификацию сетями Хопфилда или карты признаков Кохонена, не имеющие статистических аналогов. Во-вторых, многие исследования, касающиеся применения нейросетей в финансах и бизнесе, выявили их преимущества перед ранее разработанными статистическими методами. Рассмотрим подробнее результаты сравнения методов нейросетей и математической статистики.

Являются ли нейронные сети языком описания?

Как уже отмечалось, некоторые статистики утверждают, что нейросетевые подходы к обработке данных являются просто заново переоткрытыми и переформулированными, но хорошо известными статистическими методами анализа. Иными словами, нейрокомпьютинг просто пользуется *новым языком* для описания старого знания. В качестве примера приведем цитату из Уоррена Сэрла:

> “Многие исследователи нейронных сетей являются инженерами, физиками, нейрофизиологами, психологами или специалистами по компьютерам, которые мало знают о статистике и нелинейной оптимизации. Исследователи нейронных сетей постоянно переоткрывают методы, которые известны в математической и статистической литературе десятилетиями и столетиями, но часто оказываются неспособными понять как работают эти методы”

Подобная точка зрения, на первый взгляд, может показаться обоснованной. Формализм нейронных сетей действительно способен претендовать на роль универсального языка. Не случайно уже в пионерской работе МакКаллока и Питтса было показано, что нейросетевое описание эквивалентно описанию логики высказываний.

> “Я в действительности обнаружил, что с помощью с помощью техники, которую я разработал в работе1961 года (…), я мог бы легко ответить на *все* вопросы, которые мне задают специалисты по мозгу (...) или компьютерщики. Как физик, однако, я хорошо знал, что теория, которая объясняет все, на самом деле не объясняет ничего: в лучшем случае она является *языком*”. **Эдуардо Каянелло**

Не удивительно поэтому, что статистики часто обнаруживают, что привычные им понятия имеют свои аналоги в теории нейронных сетей. Уоррен Сэрл составил небольшой словарик терминов, использующихся в этих двух областях.

Таблица 1. Словарь аналогичных терминов

Нейронные сети	**Статистические методы.**
Признаки	переменные
входы	независимые переменные
выходы	предсказанные значения
целевые значения	зависимые переменные
ошибка	невязка
обучение, адаптация, самоорганизация	оценка
функция ошибки, функция Ляпунова	критерий оценки
обучающие образы (пары)	наблюдения
параметры сети: веса, пороги.	Оценочные параметры
нейроны высокого порядка	взаимодействия

функциональные связи	трансформации
обучение с учителем или гетероассоциация	регрессия и дискриминантный анализ
обучение без учителя или автоассоциация	сжатие данных
соревновательное обучение, адаптивная векторная квантизация	кластерный анализ
обобщение	интерполяция и экстраполяция

В чем различие нейронных сетей и статистики?

В чем же заключается сходство и различие языков нейрокомпьютинга и статистики в анализе данных. Рассмотрим простейший пример.

Предположим, что мы провели *наблюдения* и экспериментально измерили N пар точек, представляющих функциональную зависимость $y(x)$: $\{(x_1, y_1),...(x_N, y_N)\}$. Если попытаться провести через эти точки наилучшую прямую, что на языке статистики будет означать использование для описания неизвестной зависимости *линейной модели*

$$y = ax + b + \varepsilon ,$$

(где ε обозначает шум при проведении наблюдения), то решение соответствующей проблемы *линейной регрессии* сведется к нахождению оценочных значений параметров $\tilde{a}, \tilde{b}$, минимизирующих сумму квадратичных *невязок*.

$$\sum_{k=1}^{N} [y_k - (ax_k + b)]^2 .$$

Если параметры $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ найдены, то можно оценить значение y для любого значения x, то есть осуществить *интерполяцию* и *экстраполяцию* данных.

Та же самая задача может быть решена с использованием однослойной сети с единственным входным и единственным *линейным* выходным нейроном. Вес связи a и порог b могут быть получены путем минимизации той же величины невязки (которая в данном случае будет называться среднеквадратичной *ошибкой*) в ходе *обучения* сети, например методом backpropagation. Свойство нейронной сети к *обобщению* будет при этом использоваться для предсказания выходной величины по значению входа.

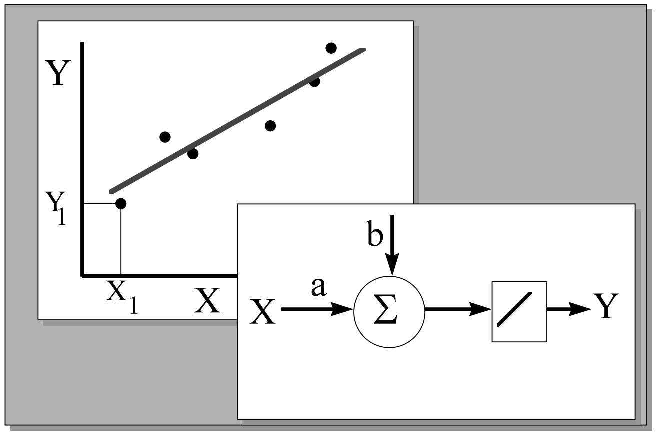

Рисунок 1. Линейная регрессия и реализующий ее однослойный персептрон.

При сравнении этих двух подходов сразу бросается в глаза то, что при описании своих методов статистика апеллирует к *формулам* и *уравнениям*, а нейрокомпьютинг к *графическому описанию нейронных архитектур*.

🗁 Если вспомнить, что с формулами и уравнениями оперирует левое полушарие, а с графическими образами правое, то можно понять, что в сопоставлении со статистикой вновь проявляется "*правополушарность*" нейросетевого подхода.

Еще одним существенным различием является то, что для методов статистики не имеет значения, каким образом будет минимизироваться невязка - в любом случае *модель* остается той же самой, в то время как для нейрокомпьютинга главную роль играет именно *метод обучения.* Иными словами, в отличие от нейросетевого подхода, оценка параметров модели для статистических методов не зависит от метода минимизации. В то же время статистики будут рассматривать изменения вида невязки, скажем на

$$\sum_{k=1}^{N} \left| y_k - (ax_k + b) \right|,$$

как *фундаментальное изменение модели*.

В отличие от нейросетевого подхода, в котором основное время забирает обучение сетей, при статистическом подходе это время тратится на тщательный анализ задачи. При этом опыт статистиков используется для выбора модели на основе анализа данных и информации, специфичной для данной области. Использование нейронных сетей - этих универсальных аппроксиматоров - обычно проводится без использования априорных знаний, хотя в ряде случаев оно весьма полезно. Например, для рассматриваемой линейной модели использование именно среднеквадратичной ошибки ведет к получению оптимальной оценки ее параметров, когда величина шума ε имеет нормальное распределение с одинаковой дисперсией для всех обучающих пар. В то же время если известно, что эти дисперсии различны, то использование *взвешенной* функции ошибки

$$\sum_{k=1}^{N} c_k [y_k - (ax_k + b)]^2$$

может дать значительно лучшие значения параметров.

Помимо рассмотренной простейшей модели можно привести примеры других в некотором смысле эквивалентных моделей статистики и нейросетевых парадигм

Таблица 2. Аналогичные методики

Нейронные сети	**Статистические методы**
Многослойный персептрон	Нелинейная (в т.ч. логистическая) регрессия, Дискриминантные модели
Автоассоциативный персептрон	Анализ главных компонент
Векторная квантизация	Кластеризация с *k*-средними
Сети нейронов высоких порядков	Полиномиальная регрессия

Сеть Хопфилда имеет очевидную связь с кластеризацией данных и их факторным анализом.

- **Факторный анализ** используется для изучения *структуры* данных. Основной его посылкой является предположение о существовании таких признаков - *факторов*, которые невозможно наблюдать непосредственно, но можно оценить по нескольким наблюдаемым первичным признакам. Так, например, такие признаки, как *объем производства* и *стоимость основных фондов*, могут определять такой фактор, как *масштаб производства*. В отличие от нейронных сетей, требующих обучения, факторный анализ может работать лишь с определенным числом наблюдений. Хотя в принципе число таких наблюдений должно лишь на единицу превосходить число переменных рекомендуется использовать хотя бы втрое большее число значение. Это все равно считается меньшим, чем объем обучающей выборки для нейронной сети. Поэтому статистики указывают на преимущество факторного анализа, заключающееся в использовании меньшего числа данных и, следовательно, приводящего к более быстрой генерации модели. Кроме того, это означает, что реализация методов факторного анализа требует менее мощных вычислительных средств. Другим преимуществом факторного анализа считается то, что он является методом типа white-box, т.е. полностью открыт и понятен - пользователь может легко осознавать, почему модель дает тот или иной результат. Связь факторного анализа с моделью Хопфилда можно увидеть, вспомнив векторы минимального базиса для набора наблюдений (образов памяти - см. Главу 5). Именно эти векторы являются аналогами факторов, объединяющих различные компоненты векторов памяти - первичные признаки.

- **Логистическая регрессия** является методом бинарной классификации, широко применяемом при принятии решений в финансовой сфере. Она позволяет оценивать вероятность реализации (или нереализации) некоторого события в зависимости от значений некоторых независимых переменных - предикторов: $x_1,...,x_N$. В модели логистической регресии такая вероятность имеет аналитическую форму: $\Pr(\mathbf{x}) = (1+\exp(-z))^{-1}$, где $z = a_0 + a_1x_1 + ... + a_Nx_N$. Нейросетевым аналогом ее очевидно является однослойный персептрон с нелинейным выходным нейроном. В финансовых приложениях логистическую регрессию по ряду причин предпочитают многопараметрической линейной регрессии и дискриминантному анализу. В частности, она автоматически обеспечивает принадлежность вероятности интервалу [0,1], накладывает меньше ограничений на распределение значений предикторов. Последнее очень существенно, поскольку распределение значений финансовых показателей, имеющих форму отношений, обычно не является нормальным и "сильно перекошено". Достоинством нейронных сетей является то, что такая ситуация не представляет для них проблемы. Кроме того, нейросети нечувствительны к корреляции значений предикторов, в то время как методы оценки параметров регрессионной модели в этом случае часто дают неточные значения.

В то же время многие нейронные парадигмы, такие как сети Кохонена или машина Больцмана не имеют прямых аналогов среди статистических методов.

🗁 В каком-то смысле недоверие и даже "ревность" к нейросетевым методам в сообществе статистиков аналогичны такому же отношению, существовавшему в недалеком прошлом среди специалистов в области Искусственного Интеллекта. Теперь же значительную часть публикаций в журналах типа Artificial Intelligence (AI) или AI Expert составляют работы, посвященные нейронным технологиям. В настоящее время в статистическом сообществе растет интерес к нейронным сетям, как с теоретической, так и с практической точек зрения. Это проявляется в инкорпорации нейросетевых средств в стандартные статистические пакеты, такие как **SAS** и **SPSS**.

Что лучше, статистические методы или нейронные сети?

Лучшим ответом на этот сугубо практический для прикладника вопрос является "*It depends*". По-русски это означает "*Все зависит от ситуации*". Иногда, особенно если априорная информация о данных отсутствует, разумнее использовать нейронные сети. Такой выбор часто дает быстрое и качественное решение задачи, как правило не худшее, чем получаемое статистическими методами после тщательного изучения структуры данных.

🗁 Иногда высказывается такое мнение, что статистические методы предназначены для *профессионалов*, поскольку их использование требует основательной теоретической подготовки. В то же время, нейронные сети - это инструмент *любителей*, который можно быстро освоить и применять. Как бы то ни было, разработка нейросетевой системы анализа данных действительно может быть осуществлена за значительно более короткое время (порядка нескольких месяцев) нежели создание аналогичной системы статистического анализа (требующее годы). Например, бизнес-стратег Дэниэл Баррас, автор "Technotrands: How to Use Technology to Go Beyond Your Competition" утверждает, что для того, чтобы остаться конкурентноспособным, деловой человек должен не только использовать инструменты будущего, но и использовать их по-новому. В частности, нейросетевые технологии снабжают людей экспертизой, которая прежде могла быть получена лишь в течении многих лет обучения и опыта.

При наличии дополнительных знаний о характере задачи статистические данные могут оказаться предпочтительнее. При сравнительном анализе возможностей нейронных сетей и статистических методов надо быть достаточно осторожными, поскольку иногда весьма сложные нейросетевые подходы сопоставляются с простыми статистическими моделями или наоборот. Существует мнение, что одинаково мощные статистические и нейросетевые подходы дают результаты одинаковые по точности и по затратам. Тем не менее, примеры решения действительно важных прикладных задач могут дать представление о возможностях того или иного подхода.

🗁 Очень важной является проблема диагностирования инфаркта миокарда в приемном покое. Опытные врачи правильно определяют это заболевание в 88% случаев и в 29% случаев дают ложную тревогу. Разнообразные статистические методы, включая *дискриминантный анализ*, *логистическую регрессию*, *рекурсивный анализ распределений* и пр. смогли лишь незначительно снизить число ложных тревог (до 26%). А вот Вильям Бакст, работающий на медицинском факультете университета в Сан-Диего, использовал для диагностики многослойный персептрон и повысил число правильно диагностированных инфарктов до 92%. Но более впечатляющим его результатом было снижение числа ложных тревог до 4%(!). Заметим, что такое значительное уменьшение ложно-положительных реакций является достаточно типичным преимуществом использования нейронных сетей. Эта особенность стимулирует в настоящее время разработку нейросетевых систем диагностики рака молочной железы, для которой ложные диагнозы являются настоящим бичом.

- Дэвид Эшби и Нед Кумар из Школы Бизнеса в Арканзасе сравнили результаты применения нейросетевой технологии и классического *дискриминантного анализа* к предсказанию невыполнения обязательств по высокодоходным облигациям (*"junk-bonds"*). Такие облигации являются в настоящее время основным источником внешнего финансирования американских корпораций. Невыполнение обязательств означает либо потерю интереса к компании, либо потерю финансирования. Поскольку операции с такими облигациями носят ярко выраженный спекулятивный характер, то предсказание выхода их из игры представляет интерес для ее участников. Задача состоит в классификации облигаций на два класса: выполнят - не выполнят. Первичный набор признаков, характеризовавших каждую облигацию, включал 29 финансовых и рыночных показатели фирм, из которых после корреляционного анализа было отобрано 16. Линейный дискриминантный анализ позволил провести классификацию с точностью 87.5%, в то время как двухслойный персептрон (16 нейронов в скрытом слое) дал несколько лучший результат - 89.3% правильных ответов.

- Нейронные сети помогают выявить связи между данными в тех случаях, когда статистические методы не справляются с задачей. Например, статистика не позволяет найти корреляцию в последовательностях ДНК двух бактериофагов PHIX174 и MIG4XX, хотя было известно, что они являются ближайшими родственниками. Использование сетей Хопфилда для поиска в этих последовательностях скрытых повторов (периодичностей), обеспечившее учет корреляций между нуклеотидными парами, не только показало несомненную близость геномов этих фагов, но и продемонстрировало, что они представляют собой гены, "сбежавшие" с комплементарных цепей ДНК-предшестенницы.

Почему статистики ревнуют специалистов по нейронным сетям, а не наоборот?

Среди так или иначе конкурирующих методологий (а нейронные сети и статистика имеют общую часть "*электората"* - анализ данных) как правило побеждает не более обоснованная и надежная, а та, что ставит новые задачи для исследования (Имре Лакатош). Нейрокомпьютинг гораздо более молодая отрасль знания нежели статистика. Он бросает многочисленные вызовы специалистам различных профессий: биологам, физикам, психологам, математикам и другим. Кроме того, сфера теории нейронных сетей гораздо шире анализа данных. Она включает в себя и моделирование мозга и разработку нейрокомпьютеров. Статистики не могут претендовать на соревнование в этих областях и ревностно следят за претензиями нейрокомпьютинга на их экологическую нишу.

Перекрестное опыление.

Конструктивный взгляд на взаимоотношение нейронных сетей и статистических методов заключается в том, что в общем случае они должны помогать друг другу и обогащать друг друга. Кристоф и Пьер Кувре назвали такой процесс *перекрестным опылением*.

- Например, было показано, что нейросетевые классификаторы оценивают апостериорную Байесовскую вероятность и поэтому аппроксимируют оптимальный статистический классификатор с минимальной ошибкой. Подобная статистическая интерпретация значений выходов нейронной сети позволяет, в частности, компенсировать обычно существующие диспропорции в объемах примеров, представляющих в обучающей выборке различные классы.

Практические выводы

Джон Такер провел тщательное сравнительное исследование использования логистической регрессии и нейронных сетей и определил следующее их *принципиальное различие*, которое сохраняет свое значение и при общем сопоставления статистики и нейрокомпьютинга. В то время как статистические методы фокусируются на оптимальном методе *выбора* переменных, нейрокомпьютинг ставит во главу угла *предобработку* этих переменных. Если нейронная сеть представляет собой многослойный персептрон, то функцией скрытых слоев и является такая последовательная предобработка данных. Вследствие этого нейронные сети занимают *уникальное* место среди методов обработки данных, превосходя их в *универсальности* и *сложности*, оставаясь при этом *data-driven* методом мало чувствительным к форме данных как таковых.

Главный практический вывод, который может сделать читатель, сводится к фразе, уже ставшей афоризмом:

> "Если *ничего* не помогает, попробуйте нейронные сети".

Нейронные сети и экспертные системы

Рассмотрим теперь отношения нейрокомпьютинга и экспертных систем. Обе эти технологии иногда относят к направлению *Искусственный Интеллект*, хотя строго говоря, термин искусственный интеллект появился в 70-е годы в связи с экспертными системами, как направления *альтернативного* нейронным сетям.

🗁 Первая конференция по проблемам искусственного интеллекта состоялась в США в 1969 году - в этом же году и была опубликована критическая книга Минского и Пейперта "Персептроны".

Его основатели - Марвин Минский и Эдвард Фейгенбаум посчитали излишней апелляцию к архитектуре мозга, его нейронным структурам, и декларировали необходимость моделирования работы человека со *знаниями.* Тем самым, поставив в центр внимания *операции с формально-логическими языковыми структурами*, они заведомо выбрали ориентацию на имитацию обработки информации *левым* полушарием мозга человека. Системы обработки таких формализованных знаний были названы *экспертными*, поскольку они должны были воспроизводить ход *логических* рассуждений эксперта (высокопрофессионального специалиста) в конкретной предметной области. Эти рассуждения проводятся с использованием *правил вывода*, которые *инженер знаний* должен извлечь у эксперта.

Заметим, что в настоящее время распространено более *широкое толкование* систем искусственного интеллекта. К ним относят не только экспертные , но и нечеткие системы, нейронные сети и всевозможные комбинации, такие как нечеткие экспертные системы или нечеткие нейронные системы. Отдельным направлениями, выделяются также *эвристический поиск*, в рамках которого в 80-е годы Ньюэллом и Саймоном был разработан Общий Решатель Задач (GPS - General Problem Solver), а также обучающиеся машины (Ленат, Холланд). И если GPS не мог решать практические задачи, то машинная обучающаяся система EURISCO внесла значительный вклад в создание СБИС, изобретя трехмерный узел типа И/ИЛИ.

Однако, экспертные системы претендовали именно на решение важных прикладных задач прежде всего в таких областях, как медицина и геология. При этом соответствующая технология в сочетании с нечеткими системами была в 1978 году положена японцами в основу программы создания компьютеров 5-го поколения.

🗁 Парадокс искусственного интеллекта заключается в том, что как только некоторая, кажущаяся интеллектуальной, деятельность оказывается искусственно реализованной, она перестает считаться интеллектуальной. В этом смысле наибольшие шансы остаться интелелктуальными имеют как раз нейронные сети, из которых еще не извлечены артикулированные знания.

Сопоставление экспертных систем и нейрокомпьютинга выявляет различия, многие из которых характерны для уже отмечавшихся в первой лекции различий обычных компьютеров (а экспертные системы реализуются именно на традиционных машинах, главным образом на языке ЛИСП и Пролог) и нейрокомпьютеров

Таблица 3. Сравнение методов нейронных сетей и экспертных систем

	Нейронные сети	**Экспертные системы**
Аналогия	правое полушарие	левое полушарие
Объект	данные	знания
Вывод	отображение сетью	правила вывода

Важным преимуществом нейронных сетей является то, что разработка экспертных систем, основанных на правилах требует 12-18 месяцев, а нейросетевых - от нескольких недель до месяцев.

Рассматривая извлечение знаний из обученных нейронных сетей мы уже показали, что представление о них, как о черных ящиках, не способных объяснить полученное решение (это представление иногда рассматривается как аргумент в пользу преимущества экспертных систем перед нейросетями), неверно. В то же время, очевидно, что как и в случае мозга, в котором левое и правое полушарие действуют сообща, естественно и объединение экспертных систем с искусственными нейронными сетями. Подобные синтетические системы могут быть названы *нейронными экспертными системами* - этот термин использовал Иржи Шима, указавший на необходимость интеграции достоинств обоих типов систем. Такая интеграция может осуществляться двояким образом. Если известна только часть правил, то можно либо инициализировать веса нейронной сети исходя из явных правил, либо инкорпорировать правила в уже обученные нейронные сети. Шима предложил использовать и чисто коннекционистский методику построения нейронных эксперных систем, которая обладает таким достоинством, как возможность работы с неполными данными (ситуация типичная для реальных баз данных). Такой возможностью обладают введенные им сети интервальных нейронов.

Сети интервальных нейронов

Ситуация, в которой некоторые данные не известны или не точны, встречается достаточно часто. Например, при оценке возможностей той или иной фирмы, можно учитывать ее официально декларируемый капитал, скажем в 100 миллионов, но лучше всего считать, что в действительности его величина является несколько большей и меняется *в интервале* от 100 до 300 млн. Удобно ввести в данном случае специальные нейроны, состояния которых кодируют не бинарные или непрерывные значения, а *интервалы значений*. В случае, если нижняя и верхняя граница интервала совпадают, то состояния таких нейронов становятся аналогичными состояниям обычных нейронов.

Для интервального нейрона i на каждый его вход j подается не одно , а пара значений, $\langle a_j, b_j \rangle$ определяющая границы интервала, в котором лежит величина воздействия j-го нейрона. Воздействие, оказываемое на i-й нейрон со стороны всех связанных с ним нейронов само лежит в интервале $\langle x_i, y_i \rangle$, где

$$x_i = \sum_j w_{i,j} \left(\frac{a_j}{1+e^{-\beta_i w_{i,j}}} + \frac{b_j}{1+e^{\beta_i w_{i,j}}} \right), \qquad y_i = \sum_j w_{i,j} \left(\frac{a_j}{1+e^{\beta_i w_{i,j}}} + \frac{b_j}{1+e^{-\beta_i w_{i,j}}} \right),$$

β_i - обратная температура.

Интервальное значение, которое принимает i-й нейрон при данном воздействии, равно

$$\langle a_i, b_i \rangle = \langle S_i(x_i), S_i(y_i) \rangle$$

где

$$S_i(x) = \frac{1-e^{-\beta_i x}}{1+e^{-\beta_i x}}.$$

Передаточная функция интервального нейрона приблизительно отражает идею монотонности по отношению к операции интервального включения. Это означает, что при $\beta \to \infty$, если вход j-го нейрона лежит в интервале $\langle a_j, b_j \rangle$, то выход i- го нейрона, определенный по классической функции Ферми, обязательно попадет в интервал $\langle a_i, b_i \rangle$. Интервальные нейроны могут являться элементами многослойных персептронов. В этом случае их состояния вычисляются последовательно, начиная от входного слоя к выходному. Для сетей интервальных нейронов может быть построено обобщение метода обратного распространения ошибки, описание которого выходит за рамки нашего курса.

Нейронные сети и нечеткая логика

Системы нечеткой логики (fuzzy logics systems) могут оперировать с неточной качественной информацией и объяснять принятые решения, но не способны автоматически усваивать правила их вывода. Вследствие этого, весьма желательна их кооперация с другими системами обработки информации для преодоления этого недостатка. Подобные системы сейчас активно используются в различных областях, таких как контроль технологических процессов, конструирование, финансовые операции, оценка кредитоспособности, медицинская диагностика и др. Нейронные сети используются здесь для настройки *функций принадлежности* нечетких систем принятия решений. Такая их способность особенно важна при решении экономических и финансовых задач, поскольку вследствие их динамической природы функции принадлежности неизбежно должны адаптироваться к изменяющимся условиям.

Хотя нечеткая логика может явно использоваться для представления знаний эксперта с помощью правил для лингвистических переменных, обычно требуется очень много времени для конструирования и настройки функций принадлежности, которые количественно определяют эти переменные. Нейросетевые методы обучения автоматизируют этот процесс и существенно сокращают время разработки и затраты на нее, улучшая при этом параметры системы.

Системы, использующие нейронные сети для определения параметров нечетких моделей, называются *нейронными нечеткими системами.* Важнейшим свойством этих систем является их интерпретируемость в терминах нечетких правил *if-then.*

Подобные системы именуются также *кооперативными* нейронными нечеткими системами и противопоставляются *конкурентным* нейронным нечетким системам, в которых нейронные сети и нечеткие системы работают вместе над решением одной и той же задачи, не взаимодействуя друг с другом. При этом нейронная сеть обычно используется для предобработки входов или же для постобработки выходов нечеткой системы.

Кроме них имеются также *нечеткие нейронные системы.* Так называются нейронные сети, использующие методы нечеткости для ускорения обучения и улучшения своих характеристик. Это может достигаться, например, использованием нечетких правил для изменения темпа обучения или же рассмотрением нейронных сетей с нечеткими значениями входов.

Существует два основных подхода к управлению темпом обучения персептрона методом обратного распространения ошибки. При первом этот темп одновременно и равномерно уменьшается для всех нейронов сети в зависимости от одного глобального критерия - достигнутой среднеквадратичной погрешности на выходном слое. При этом сеть быстро учится на начальном этапе обучения и избегает осцилляций ошибки на позднем. Во втором случае оцениваются изменения отдельных межнейронных связей. Если на двух последующих шагах обучения инкременты связей имеют противоположный знак, то разумно уменьшить соответствующий локальный темп - впротивном случае его следует увеличить. Использование нечетких правил может обеспечить более аккуратное управление локальными темпами модификации связей. В частности это может быть достигнуто, если в качестве входных параметров этих правил использовать последовательные значения градиентов ошибки. Таблица соответствующих правил может иметь, например следующий вид:

Таблица 4. Нечеткое правило адаптации темпа обучения нейронной сети

Текущий градиент → Предыдущий градиент	NB	NS	Z	PS	PB
NB	PB	PS	Z	NS	NB
NS	NS	PS	Z	NS	NB
Z	NB	NS	Z	NS	NB
PS	NB	NS	Z	PS	NS
PB	NB	NS	Z	PS	PB

Лингвистические переменные Темп Обучения и Градиент принимают в иллюстрируемом таблицей нечетком правиле адаптации следующие значения: NB - большой отрицательный; NS - малый отрицательный; Z - близок к нулю; PS - малый положительный; PB - большой положительный.

Наконец, в современных *гибридных* нейронных нечетких системах нейронные сети и нечеткие модели комбинируются в единую гомогенную архитектуру. Такие системы могут интерпретироваться либо как нейронные сети с нечеткими параметрами, либо как параллельные распределенные нечеткие системы.

Элементы нечеткой логики

Центральным понятием нечеткой логики является понятие *лингвистической переменной.* Согласно Лотфи Заде лингвистической называется переменная, значениями которой являются *слова* или *предложения* естественного или искусственного языка. Примером лингвистической переменной является, например, **падение производства**, если она принимает не числовые, а *лингвистические значения*, такие как, например, **незначительное**, **заметное**, **существенное**, и **катастрофическое**. Очевидно, что лингвистические значения *нечетко* характеризуют имеющуюся ситуацию. Например, падение производства на 3% можно рассматривать и как *в какой-то мере* **незначительное**, и как *в какой-то мере* **заметное.** Интуитивно ясно, что мера того, что данное падение является катастрофическим должна быть весьма мала.

Смысл лингвистического значения X и характеризуется выбранной мерой - так называемой *функций принадлежности* (*membership function*) μ: $U \to [0,1]$, которая каждому элементу u *универсального множества* U ставит в соответствие значение совместимости этого элемента с X. В нашем случае универсальным множеством является множество всех возможных величин падения производства (от 0 до 100%).

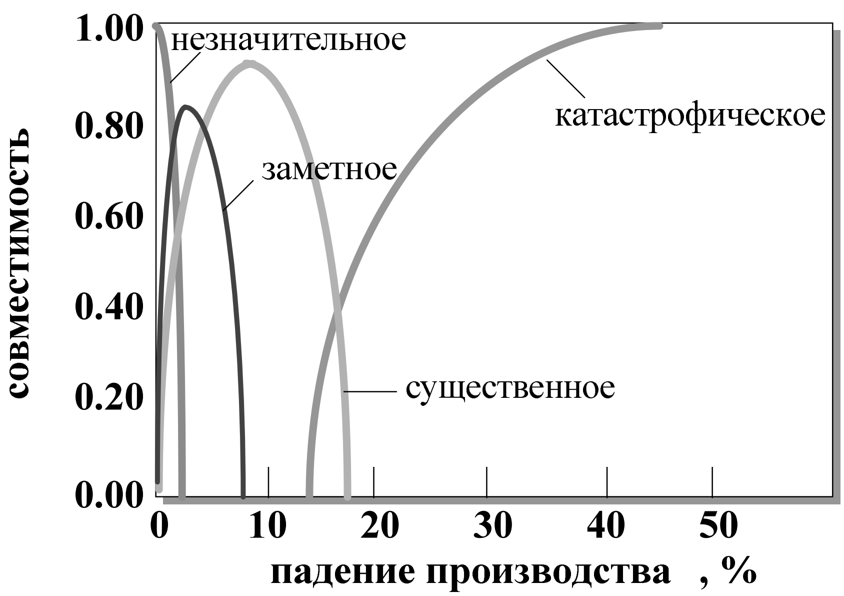

Рисунок 2. Функции принадлежности лингвистической переменной Падение производства.

Нечеткое правило связывает значения лингвистических переменных. Примером такого правила может быть, например, следующее.

Если (**падение производства - катастрофическое**), то (**доходы от экспорта энергоресурсов - значительные**).

Нечеткое подмножество универсального множества U характеризуется *функцией принадлежности* $\mu_A : U \to [0,1]$, которая ставит в соответствие каждому элементу $u \in U$ число $\mu_A(u)$ из интервала [0, 1], характеризующее степень принадлежности элемента u подмножеству A.

Носителем множества A называется множество таких точек в U, для которых величина $\mu_A(u)$ положительна.

Нечеткие нейроны

Преобразование, осуществляемое типичным нейроном с двумя входами, имеет вид $y = f(w_1 x_1 + w_2 x_2)$, где $f(\cdot)$ - сигмоидная функция. Для того, чтобы обобщить его, нужно представить себе, что вес нейрона не обязательно должен умножаться на значение соответственного входа, а здесь может быть применена какая-либо другая операция. Далее, суммирование воздействий также может быть заменено неким другим действием. Наконец, вместо сигмоидной функции потенциал нейрона может быть преобразован каким-либо новым способом. В нечеткой логике операция умножения заменяется для булевых переменных операцией **И**, а для числовых - операцией взятия минимума (**min**). Операция суммирования заменяется соответственно операциями **ИЛИ** и взятием максимума (**max**).

Если осуществить соответствующие замены в преобразовании, осуществляемом знакомым нам нейроном, и положить в нем $f(z) = z$ (линейный выход), то мы получим так называемый *нечеткий ИЛИ-нейрон:*

$$y = \max\{\min(w_1, x_1), \min(w_2, x_2)\}.$$

Для нечетких нейронов полагается, что значения входов и весов заключены в интервале [0, 1], поэтому и выход нейрона ИЛИ будет принадлежать этому же интервалу.

Используя противоположную подстановку (умножение$\to$max), (сложение$\to$min) получим преобразование, характерное для *нечеткого И-нейрона*:

$$y = \min\{\max(w_1, x_1), \max(w_2, x_2)\}$$

Извлечение правил if-then

В главе, посвященной извлечению знаний, мы уже познакомились с нейросетевыми методами извлечения правил из данных. Настало время узнать, как можно извлечь с их помощью *нечеткие* правила.

Рассмотрим набор нечетких правил

$\Re_i$: **Если** *x* есть A_i , **то** y есть B_i, $\quad i = 1, \ldots, n.$

Каждое из них может интерпретироваться как обучающая пара для многослойного персептрона. При этом, условие (*x* есть A_i) определяет значение входа, а следствие (y есть B_i) - значение выхода сети. Полное обучающее множество имеет вид $\{(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)\}$. Заметим, что каждому лингвистическому значению A_i, B_i соответствует своя функция принадлежности, так что каждое нечеткое правило определяет связь двух функций.

Если же правила имеют более сложный вид, типа “два входа - один выход”:

$\Re_i$: **Если** x есть A_i **и** y есть B_i, **то** z есть C_i, $i = 1,\ldots,n,$

то обучающая выборка принимает форму $\{(A_i, B_i), C_i\}$, $i = 1,\ldots,n.$

Существует два основных подхода к реализации нечетких правил типа if-then с помощью многослойных персептронов.

В методе Умано и Изавы нечеткое множество представляется конечным числом значений совместимости. Пусть $[\alpha_1, \alpha_2]$ включает носители всех A_i, входящих в обучающую выборку а также носители всех A', которые могут быть входами в сети. Предположим также, что $[\beta_1, \beta_2]$ включает носители всех B_j, входящих в обучающую выборку, а также носители всех B', которые могут быть входами в сети. Положим

$$x_j = \alpha_1 + (j-1)(\alpha_2 - \alpha_1)/(N-1),\ j = 1,\ldots,N;\ \ N > 1,$$

$$y_i = \beta_1 + (i-1)(\beta_2 - \beta_1)/(M-1),\ i = 1,\ldots,M;\ \ M > 1,$$

Дискретный аналог обучающего множества правил (заменяющее функциональное) имеет вид:

$$\{(A_i(x_1),\ldots,A_i(x_N)),(B_i(y_1),\ldots,B_i(y_M))\},\ i = 1,\ldots,n.$$

Если теперь ввести обозначения $a_i \equiv A_i(x\ )$, $b_i \equiv B_i(y\ )$, то можно представить нечеткую нейронную сеть с N входными и M выходными нейронами (Рисунок 3).

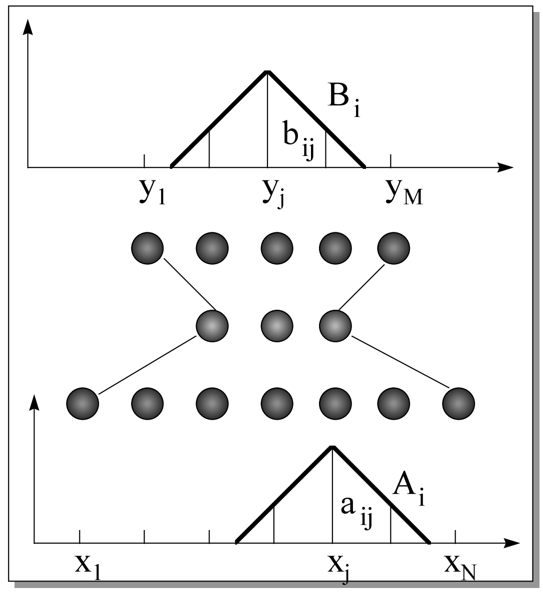

Рисунок 3. Нечеткая нейронная сеть и треугольные функции принадлежности входных и выходных переменных

Пример 1. Предположим, что обучающая выборка включает три правила:

$\Re_1$: Если город мал, то доход от продажи бриллиантов отрицателен,

$\Re$: Если город средний, то доход от продажи бриллиантов близок к нулю,

$\Re_3$: Если город велик, то доход от продажи бриллиантов положителен.

Функции принадлежности определим как

$$\mu_{\text{малый}}(u) = \begin{cases} 1 - \dfrac{u}{50000}, & 0 \le u \le 50000 \\ 0, & \mathrm{u} > 50000 \end{cases} \qquad \mu_{\text{доход}<0}(u) = \begin{cases} -u, & -1 \le u \le 0 \\ 0, & u > 0 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{средний}}(u) = \begin{cases} \dfrac{u}{50000}, & 0 \le u \le 50000 \\ \dfrac{300000 - u}{250000}, & 50000 \le u \le 300000 \\ 0, & u > 300000 \end{cases} \qquad \mu_{\text{доход}\approx 0}(u) = \begin{cases} 1 - 2|u|, & |u| \le 0.5 \\ 0, & |u| > 0.5 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{большой}}(u) = \begin{cases} 0, & u < 50000 \\ \dfrac{u - 50000}{250000}, & 50000 \le u \le 300000 \\ 1, & u > 300000 \end{cases} \qquad \mu_{\text{доход}>0}(u) = \begin{cases} u, & 0 \le u \le 1 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

(Здесь предполагается, что доход не превышает 100% или 1.0 в относительных величинах)

Тогда обучающая выборка принимает форму

{(малый, отрицательный), (средний, близок к нулю), (большой, положительный)}

Если носитель множества входов [0, 10 000 000], то для покрытия множества населения городов равномерной сеткой, захватывающей и малые города, понадобится несколько сот точек. Поэтому, ограничимся городами с населением 1 000 000 человек. Тогда можно выбрать $N \cong 50-100$. Носитель множества выходов [-1,1] может быть описан набором из $M \cong 5-10$. Таким образом, в рассматриваемом случае сеть будет иметь умеренные размеры (например 50 - ... - 5) и 3 пары в обучающем наборе.

В методе Уехары и Фуджицы вместо разбиения равномерной сеткой области, покрывающей носители всех функций принадлежности, равномерно разбивается область изменения этих функций [0,1]. Здесь видна явная аналогия с переходом от интегрирования по Риману к интегралу Лебега. Остальные действия аналогичны уже описанным.

Адаптация функций принадлежности

В главе, посвященной извлечению знаний из обученных нейронных сетей, мы познакомились с методами интерпретации отображения сетью входной информации в выходную с помощью правил типа неравенств, правил *m-of-n* и других. В теория нечетких множеств соответствующие нечеткие правила уже изначально имеют наглядный смысл. Например,

$\Re_1$: если разрыв между бедными и богатыми высок, то уровень преступности повышен.

Конечно заманчиво иметь возможность получения не только качественного, но и количественного правила, связывающего уровень разрыва в доходах с преступностью. Мы знаем, что нейронные сети типа персептрона являются универсальными аппроксиматорами и могут реализовать любое количественное отображение. Хорошо бы поэтому построить нейронную сеть так, чтобы она, во-первых, воспроизводила указанное нечеткое *качественное* правило (чтобы изначально знать интерпретацию работы сети) и, во-вторых, давала хорошие *количественные* предсказания для соответствующего параметра (уровня преступности). Очевидно, что добиться этого можно подбором соответствующих функций принадлежности. А именно, задача состоит в том, чтобы так определить понятия “высокий разрыв в доходах” и “повышенный уровень преступности”, чтобы выполнялись и качественные и количественные соотношения. Нужно, чтобы и сами эти определения не оказалось дикими - иначе придется усомниться в используемом нами нечетком правиле. Если такая задача успешно решается, то это означает успешный симбиоз теории нечетких множеств и нейронных сетей, в которых “играют” наглядность первых и универсальность последних.

🗁 Заметим, что использованные нами ранее функции принадлежности носили достаточно специфический характер (так называемую *треугольную форму*). Успех же сочетания нечетких моделей существенно зависит от разумного нечеткого разбиения пространств входов и выходов. Вследствие этого, задача адаптации функций принадлежности может быть поставлена как задача оптимизации, для решения которой и могут использоваться нейронные сети. Наиболее простой путь для этого заключается в выборе некоторого вида функции принадлежности, форма которой управляется рядом параметров, точное значение которых находится при обучении нейронной сети.

Рассмотрим соответствующую методику на следующем примере.Обозначим

x_1 - курс доллара США ($) по отношению к немецкой марке (DM);

x_2 - курс доллара США ($) по отношению к шведской кроне (SK);

x_3 - курс доллара США ($) по отношению к финской марке (FM);

Предположим, что мы имеем три нечетких правила

$\Re$: **если** $ слаб по отношению к DM **и** слаб по отношению к SK **и** слаб по отношению к FM,

то величина портфеля очень высока

$\Re_2$: **если** $ силен по отношению к DM **и** силен по отношению к SK **и** слаб по отношению к FM,

то величина портфеля высока

$\Re_3$: **если** $ силен по отношению к DM **и** силен по отношению к SK **и** силен по отношению к FM,

то величина портфеля мала

Формально, эти правила можно записать следующим образом

$\Re$: **если** x есть L_1 **и** x_2 есть L_2 **и** x_3 есть L_3 ,**то** PV есть VB

$\Re_2$: **если** x есть H_1 **и** x_2 есть H_2 **и** x_3 есть L_3 ,**то** PV есть B

$\Re_3$: **если** x есть H_1 **и** x_2 есть H_2 **и** x_3 есть H_3 ,**то** PV есть S

Для всех нечетких правил L_i и H_i используем сигмоидные функции принадлежности

$$L_i(t) = \frac{1}{1+e^{\beta_i(t-\theta_i)}}, \quad H_i(t) = \frac{1}{1+e^{-\beta_i(t-\theta_i)}}, \quad L_i(t) + H_i(t).$$

Для нечетких оценок величины портфеля вводятся следующие функции принадлежности

$$S(t) = \frac{1}{1+e^{\gamma(t-\vartheta)}}, \quad B(t) = \frac{1}{1+e^{-\gamma(t-\vartheta)}}, \quad S(t) + B(t) = 1.$$

$$VS(t) = \frac{1}{1+e^{\gamma(t-\vartheta-\zeta)}}, \quad VB(t) = \frac{1}{1+e^{-\gamma(t-\vartheta+\zeta)}}.$$

Предположим, что точные количественные значения курса доллара по отношению к немецкой марке, шведской кроне и финской марке равны a_1, a_2, a_3, соответственно. Поскольку *любые* значения этих курсов являются в какой-то мере *слабыми* и в какой-то мере *сильными* (а соответствующие меры определяются функциями принадлежности), то все три правила вступают в игру. В этом случае можно определить *уровень активация* каждого из них:

$$\alpha_1 = \min(L_1(a_1), L_2(a_2), L_3(a_3))$$

$$\alpha_2 = \min(H_1(a_1), H_2(a_2), L_3(a_3))$$

$$\alpha_3 = \min(H_1(a_1), H_2(a_2), H_3(a_3))$$

Теперь можно вычислить и количественные оценки величины портфеля, даваемые каждым из наших правил,

$$z_1 = VB^{-1}(\alpha_1) = \vartheta + \zeta + \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}$$

$$z_2 = B^{-1}(\alpha_2) = \vartheta + \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}$$

$$z_3 = S^{-1}(\alpha_3) = \vartheta - \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1-\alpha_3}{\alpha_3}$$

Оценка величины портфеля получается усреднением вышеприведенных оценок по уровням активации каждого из правил

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

Ниже на рисунке приведена архитектура нейронной сети, эквивалентной описанной выше нечеткой системе (Рисунок 4).

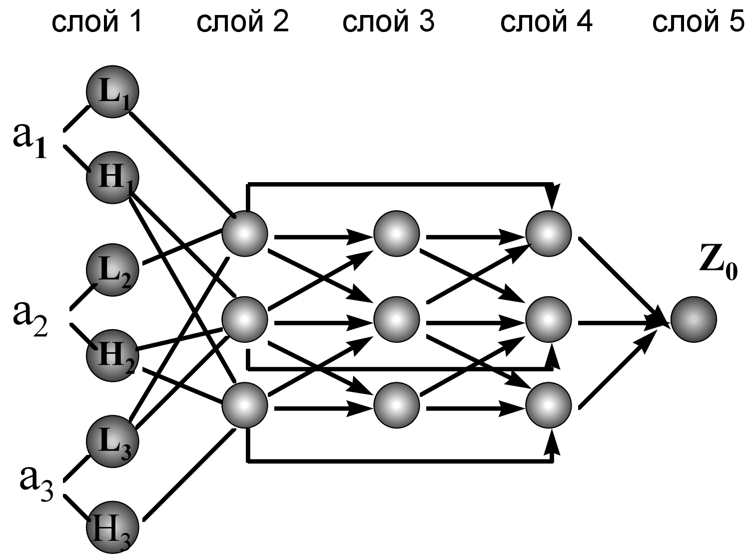

Рисунок 4. Нейронная сеть (нечеткий персептрон), входами которой являются лингвистические переменные, выходом - четкое значение величины портфеля. Скрытые слои в нечетком персептроне называются слоями правил.

Значения выходов в узлах первого слоя отражают степень соответствия входных значений лингвистическим переменным, связанными с этими узлами. Элементы второго слоя вычисляют значения уровней активации соответствующих нечетких правил. Выходные значения нейронов третьего слоя соответствуют *нормированным* значениям этих уровней активации $c_i = \alpha_i / \sum_{i=1}^{3} \alpha_i$. Выходные значения нейронов четвертого слоя вычисляются как произведения нормированных значений уровней активации правил на значения величины портфеля, соответствующего данной их (ненормированной) активации:

$$c_1 z_1 \equiv c_1 VB^{-1}(\alpha_1), \quad c_2 z_2 \equiv c_2 B^{-1}(\alpha_2), \quad c_3 z_3 \equiv c_3 S^{-1}(\alpha_3).$$

Наконец, единственный выходной нейрон (слой 5) просто суммирует воздействия нейронов предыдущего слоя.

Если мы имеем набор обучающих пар, содержащих *точные значения* курсов обмена x_k и *точные значения* величины портфеля y_k: $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_K, y_K)\}$, то определив ошибку сети для k-й обучающей пары обычным образом, как $E_k = \frac{1}{2}(y_k - o_k)^2$ (o_k - реальное значение состояния выходного нейрона), можно использовать метод градиентного спуска для коррекции значений параметров, управляющих формой функции принадлежности лингвистической переменной “величина портфеля”:

$$\gamma(t+1) = \gamma(t) - \eta \frac{\partial E_k}{\partial \gamma} = \gamma(t) - \frac{\eta}{\gamma^2} \delta_k \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3},$$

$$\vartheta(t+1) = \vartheta(t) - \eta \frac{\partial E_k}{\partial \vartheta} = \vartheta(t) - \eta \delta_k,$$

$$\zeta(t+1) = \zeta(t) - \eta \frac{\partial E_k}{\partial \zeta} = \zeta(t) + \eta \delta_k \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3},$$

$$\delta_k = (y_k - o_k).$$

Аналогичным образом выводятся уравнения коррекции для параметров, управляющих формой функций принадлежности нечетких понятий слабый L_i и сильный H_i курс доллара: $\beta_i, \theta_i, i = 1,2,3.$ Легко заметить, что особенностью описанного нами совместного использования нейросетевого и нечеткого подходов заключается в том, что адаптируются не величины связей между нейронами, а формы нелинейного преобразования, осуществляемого нейронами (формы функции принадлежности). С нейрокомпьютерной точки зрения достоинства нечетких моделей как раз и связано с нелинейностью функции принадлежности. Фиксирование и изначальное задание архитектуры сети позволяет интерпретировать ее решения. И что особенно важно, описанный подход по сути позволяет инкорпорировать априорные знания в структуру нейронной сети.

Нейронные сети и статистическая физика

Данная тема заслуживает не одной книги и ей действительно посвящена обширнейшая литература. В настоящем курсе лекций мы не можем хоть сколько-нибудь подробно остановится на ней. Рассмотрим кратко лишь применение соответствующих идей к анализу сети Хопфилда. Демонстрация тесной аналогии, существующей между спиновыми стеклами и нейронными сетями, определила массированное и плодотворное вторжение методов статистической физики в теорию нейронных сетей в начале восьмидесятых годов. Сеть Хопфилда со *стохастическими нейронами* и явилась главной моделью, в которой применение этих методов оказалось наиболее значительным. Это чрезвычайно плодотворное обобщение модели, в некотором смысле эквивалентное переходу к сетям с градуальными нейронами. В нем нейроны являются стохастическими элементами и это обстоятельство открывает путь использованию методов статистической физики для анализа свойств ассоциативной памяти.

Стохастические нейроны

Стохастический нейрон, как и в оригинальной модели Хопфилда, является бинарным - его состояние s_i принимает значения ± 1. Однако то, в какое состояние перейдет нейрон, связано со значением потенциала h_i не однозначно, а случайным образом. Именно, вероятность перехода нейрона в состояния ± 1: $\Pr\bigl(s_i(t+1) = 1\bigr) = f(h_i)$, $\Pr\bigl(s_i(t+1) = -1\bigr) = f(-h_i) = 1 - f(h_i)$, или иначе

$$\Pr\bigl(s_i(t+1)\bigr) = f(h_i),$$

где $f(h)$ - *распределение Ферми*: $f(h) = \frac{1}{1 + e^{-2\beta h}}$, удовлетворяющее необходимым условиям $0 < f(h) < 1;\ f(h) + f(-h) = 1$, и $\beta = T^{-1}$ - обратная температура. В низкотемпературном пределе $T \to 0$ распределение Ферми переходит в пороговую функцию, и поведение сети из стохастических нейронов становится аналогичным поведению сети Хопфилда, составленной из обычных бинарных нейронов.

Приближение среднего поля

Поскольку динамика состояний стохастических нейронов является вероятностной, можно интересоваться только *средней активностью*, или же *ожидаемыми значениями* их состояний

$$\langle s_i \rangle = (+1)\langle f(h_i) \rangle + (-1)\langle f(-h_i) \rangle$$

В силу нелинейности функции Ферми усреднение ее затруднительно, но в приближении среднего поля $\langle f(h) \rangle \cong f(\langle h \rangle)$ можно получить следующую замкнутую систему уравнений.

$$\langle s_i \rangle = \frac{1 - e^{-2\beta\langle h_i \rangle}}{1 + e^{-2\beta\langle h_i \rangle}} = \tanh\left(\beta\langle h_i \rangle\right) = \tanh\left(\beta \sum_j w_{ij} \langle s_j \rangle\right)$$

Фазовые переходы

На простом примере можно убедиться, что свойства сети критическим образом зависят от температуры β^{-1}. Действительно, если величины всех синаптических связей положительны и равны между собой: $\forall w_{ij} = N^{-1}$ (такая система эквивалентна ферромагнетику), то все уравнения системы сводятся к одному

$$\forall \langle s_i \rangle = \langle s \rangle = \tanh\left(\beta\langle s \rangle\right).$$

Решение этого уравнения зависит от крутизны наклона функции гиперболического тангенса в начале координат (см. Рисунок 5). При высокой температуре $(T > 1,\ \beta < 1)$ уравнение имеет только тривиальное решение $s_i = 0$. Это означает, что состояния всех нейронов беспорядочно флуктуируют, принимая с равной вероятностью значения ± 1.

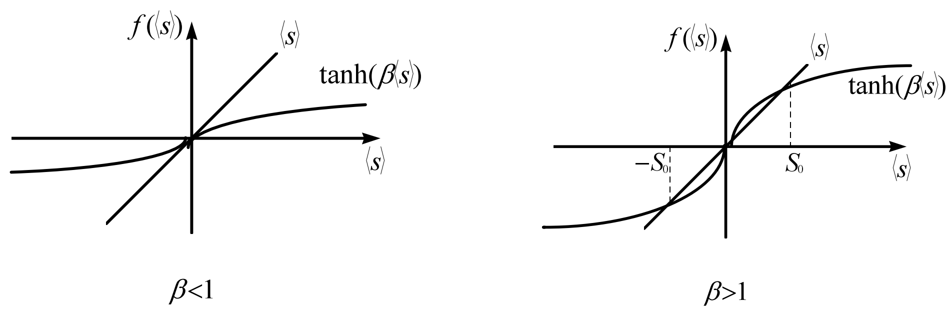

Рисунок 5. Иллюстрация к характеру решений уравнения среднего поля в приближении высокой и низкой температур.

Однако, при снижении температуры ниже *точки Кюри* $T_c = 1$ в системе происходит *фазовый переход,* при котором тривиальное решение становится неустойчивым, а у уравнения среднего поля появляется еще два устойчивых нетривиальных решения $\pm S_0$.

Такое поведение характерно и для общего случая. Мы увидим далее, что в модели Хопфилда свойства ассоциативного запоминания и вызова образов проявляются в некоторой области температуры и дополнительного параметра - степени загрузки памяти. Вне этой области система переходит в неупорядоченное состояние.

Сеть Хопфилда с Хеббовскими связями

Рассмотрим интересующий нас случай сети, в которой связи вычислены по Хеббовскому правилу, исходя из вида P запоминаемых векторов. В этом случае уравнения среднего поля принимают вид

$$\langle s_i \rangle = \tanh\left(\frac{\beta}{N} \sum_{n,j} \sigma_i^n \sigma_j^n \langle s_j \rangle \right).$$

Если сеть работает как ассоциативная память, то разумно предположить, что каждому запоминаемому вектору σ^k должно соответствовать некоторое решение системы, совпадающего с ним с точностью до постоянного множителя

$$\langle s \rangle = m\sigma^k .$$

Подставляя это выражение в уравнения среднего поля и используя предположение, что все векторы памяти не коррелированы и значения их компонент с равной вероятностью принимают значения ± 1, получим:

$$m\sigma_i^k = \tanh\left[\beta m \sigma_i^k + \beta m N^{-1} \sum_{n \neq k} \sigma_i^n \sum_j \sigma_j^n \sigma_j^k \right]$$

$$= \tanh\left[\beta m \sigma_i^k + \beta m O\left(\sqrt{\frac{P-1}{N}} \right) \right]$$

В пределе $N \to \infty,\ P << N$ получаем знакомое уравнение для множителя m:

$$m = \tanh(\beta m) .$$

Вновь при высокой температуре $(T > 1)$ это уравнение имеет только тривиальное решение и усредненная по времени конфигурация состояний нейронов не имеет ничего общего с запоминаемыми образами. При $(T < 1)$ уравнение имеет два решения $m = \pm m_0$, для которых средняя конфигурация активностей указывает на одно из запоминаемых состояний σ^k, или на его “зеркального двойника” $-\sigma^k$. Из этих состояний однозначно восстанавливаются образы памяти. Однако, если сделать моментальный снимок состояния сети, то в силу флуктуаций она практически никогда не находится ни в одном из состояний памяти, всегда воспроизводя их с некоторой ошибкой. Теоретически было показано, что загрузка памяти, $\alpha = P/N$, оказывает на поведение системы такое же влияние, как температурный параметр в распределении Ферми. Когда этот параметр мал, каждому из запоминаемых некоррелированных образов соответствует стационарное состояние сети. Однако, при приближении его к критической емкости $\alpha_c \cong 0.138$, сеть внезапно теряет все свойства памяти. В плоскости координат (α, T) области памяти и неупорядоченного поведения сети разделены границей, при пересечении которой происходит соответствующий фазовый переход. Более детальный анализ выявляет на фазовой диаграмме следующие 4 области: парамагнитную (P) фазу, в которой любой порядок разрушается высокой температурой; фазу спинового стекла (SG), в которой состояние сети не может эволюционировать к запомненным образам; смешанную (F+SG) - в ней запомненные образы метастабильны; и ферромагнитную (F) - в ней всем запоминаемым образам соответствуют глобальные минимумы энергии.

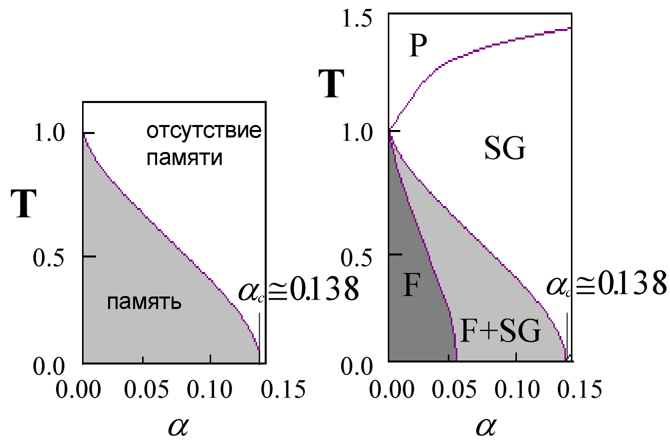

Рисунок 6. Упрощенная и детальная диаграммы фазовых состояний сети Хопфилда

Наличие тепловых флуктуаций снижает вероятность попадания сети в состояние ложных минимумов. Критическая температура, при которых множество таких минимумов становится неустойчивыми, равна $T_3 \approx 0.46$. Таким образом тепловой шум улучшает свойства памяти и наиболее благоприятным температурным интервалом работы сети является $T_3 < T < T_c$.

ЛИТЕРАТУРА

C.Couvrer and P.Couvrer. “Neural Networks and Statistics: A Naive Comparison”. *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Sciences*. **36**, No 4, 1997

J.Tucker. “Neural Networks versus Logistic Regression in Financial Modelling: A Methodological Comparison”. http://www.bioele.nuee.nagoya-u.ac.jp/wsc1/papers/p031.html

W.S.Sarle. “Neural Networks and Statistical Models”. *Proceedings of the Nineteenth Annual SAS Users Group International Conference*, Cary, NC, SAS Institute, April 3-4, 1994, 1538-1550.