Глава 1
НЕЧЕТКАЯ ИНФОРМАЦИЯ И ВЫВОДЫ

Пожалуй, наиболее поразительным свойством человеческого интеллекта является способность принимать правильные решения в обстановке неполной и нечеткой информации. Построение моделей приближенных рассуждений человека и использование их в компьютерных системах будущих поколений представляет сегодня одну из важнейших проблем науки.

Значительное продвижение в этом направлении сделано 30 лет тому назад профессором Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде (Lotfi A. Zadeh). Его работа «Fuzzy Sets», появившаяся в 1965 г. в журнале Information and Control, № 8, заложила основы моделирования интеллектуальной деятельности человека и явилась начальным толчком к развитию новой математической теории.

Л. Заде расширил классическое канторовское понятие множества, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале [0; 1], а не только значения 0 либо 1. Такие множества были названы им нечеткими (fuzzy). Он определил также ряд операций над нечеткими множествами и предложил обобщение известных методов логического вывода modus ponens и modus tollens.

Введя затем понятие *лингвистической переменной* и допустив, что в качестве ее значений (термов) выступают нечеткие множества, Л. Заде создал аппарат для описания процессов интеллектуальной деятельности, включая нечеткость и неопределенность выражений.

Дальнейшие работы профессора Л. Заде и его последователей заложили прочный фундамент новой теории и создали предпосылки для внедрения методов нечеткого управления в инженерную практику.

Уже к 1990 г. по этой проблематике опубликовано свыше 10000 работ, а число исследователей достигло 10000, причем в США, Европе и СССР по 200–300 человек, около 1000 — в Японии, 2000–3000 — в Индии и около 5000 исследователей в Китае.

В последние 5–7 лет началось использование новых методов и моделей в промышленности и в военном деле. Спектр приложений их широк: от управления процессом отправления и остановки поезда метрополитена, управления грузовыми лифтами и доменной печью до стиральных машин, пылесосов и СВЧ-печей. При этом нечеткие системы позволяют повысить качество продукции при уменьшении ресурсо- и энергозатрат и обеспечивают более высокую устойчивость к воздействию мешающих факторов по сравнению с традиционными системами автоматического управления.

Другими словами, новые подходы позволяют расширить сферу приложения систем автоматизации за пределы применимости классической теории. В этом плане любопытна точка зрения Л. Заде: «Я считаю, что излишнее стремление к точности стало оказывать действие, сводящее на нет теорию управления и теорию систем, так как оно приводит к тому, что исследования в этой области сосредоточиваются на тех и только тех проблемах, которые поддаются точному решению. В результате многие классы важных проблем, в которых данные, цели и ограничения являются слишком сложными или плохо определенными для того, чтобы допустить точный математический анализ, оставались и остаются в стороне по той причине, что они не поддаются математической трактовке. Для того чтобы сказать что-либо существенное для проблем подобного рода, мы должны отказаться от наших требований точности и допустить результаты, которые являются несколько размытыми или неопределенными».

Смещение центра исследований нечетких систем в сторону практических приложений привело к постановке целого ряда проблем, таких как новые архитектуры компьютеров для нечетких вычислений, элементная база нечетких компьютеров и контро́ллеров, инструментальные средства разработки, инженерные методы расчета и разработки нечетких систем управления и многое другое.

Математическая теория нечетких множеств позволяет описывать нечеткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечеткие выводы.

Нечеткое управление оказывается особенно полезным, когда технологические процессы являются слишком сложными для анализа с помощью общепринятых количественных методов или когда доступные источники информации интерпретируются качественно, неточно или неопределенно. Нечеткая логика, на которой основано нечеткое управление, ближе по духу к человеческому мышлению и естественным языкам, чем традиционные логические системы. Нечеткая логика, в основном, обеспечивает эффективные средства отображения неопределенностей и неточностей реального мира. Наличие математических средств отражения нечеткости исходной информации позволяет построить модель, адекватную реальности.

1.1. Нечеткие множества

Пусть E — универсальное множество, x — элемент E, а R — некоторое свойство. Обычное (четкое) подмножество A универсального множества E, элементы которого удовлетворяют свойству R, определяется как множество упорядоченных пар

$$A = \{\mu_A(x)/x\},$$

где $\mu_A(x)$ —*характеристическая функция*, принимающая значение 1, если x удовлетворяет свойству R, и 0 — в противном случае.

Нечеткое подмножество отличается от обычного тем, что для элементов x из E нет однозначного ответа «да–нет» относительно свойства R. В связи с этим нечеткое подмножество A универсального множества E определяется как множество упорядоченных пар

$$A = \{\mu_A(x)/x\},$$

где $\mu_A(x)$ — *характеристическая функция принадлежности* (или просто *функция принадлежности*), принимающая значения в некотором вполне упорядоченном множестве M (например, $M = [0, 1]$).

Функция принадлежности указывает степень (или уровень) принадлежности элемента x подмножеству A. Множество M называют множеством принадлежностей. Если $M = \{0, 1\}$, то нечеткое подмножество A может рассматриваться как обычное или четкое множество.

Примеры записи нечеткого множества

Пусть $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0, 1]$; A — нечеткое множество, для которого

$$\mu_A(x_1) = 0{,}3;\ \ \mu_A(x_2) = 0;\ \ \mu_A(x_3) = 1;\ \ \mu_A(x_4) = 0{,}5;\ \ \mu_A(x_5) = 0{,}9.$$

Тогда A можно представить в виде

$$A = \{0{,}3/x_1;\ 0/x_2;\ 1/x_3;\ 0{,}5/x_4;\ 0{,}9/x_5\},$$

или

$$A = \{0{,}3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0{,}5/x_4 + 0{,}9/x_5\},$$

или

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5}{0{,}3 \mid 0 \mid 1 \mid 0{,}5 \mid 0{,}9}.$$

Замечание. Здесь знак «+» не является обозначением операции сложения, а имеет смысл объединения.

1.1.1. Основные характеристики нечетких множеств. Пусть $M = [0, 1]$ и A — нечеткое множество с элементами из универсального множества E и множеством принадлежностей M.

• Величина $\sup\limits_{x\in E}\mu_A(x)$ называется *высотой* нечеткого множества A. Нечеткое множество A *нормально*, если его высота равна 1, т. е. верхняя граница его функции принадлежности равна 1 ($\sup\limits_{x\in E}\mu_A(x) = 1$). При $\sup\limits_{x\in E}\mu_A(x) < 1$ нечеткое множество называется *субнормальным*.

• Нечеткое множество *пусто*, если $\forall x \in E\ \ \mu_A(x) = 0$. Непустое субнормальное множество можно нормализовать по формуле

$$\mu_A(x) := \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x\in E}\mu_A(x)}.$$

• Нечеткое множество *унимодально*, если $\mu_A(x) = 1$ только на одном x из E.

• *Носителем* нечеткого множества A является обычное подмножество со свойством $\mu_A(x) > 0$, т. е. *носитель* $A = \{x/x \in E,\ \mu_A(x) > 0\}$.

• Элементы $x \in E$, для которых $\mu_A(x) = 0{,}5$, называются *точками перехода* множества A.

Примеры нечетких множеств

1. Пусть $E = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$, $M = [0, 1]$. Нечеткое множество «Несколько» можно определить следующим образом: «Несколько» $= 0{,}5/3 + 0{,}8/4 + 1/5 + 1/6 + 0{,}8/7 + 0{,}5/8$; его характеристики: *высота* $= 1$, *носитель* $= \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, *точки перехода* — $\{3, 8\}$.

2. Пусть $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Нечеткое множество «Малый» можно определить:

$$\text{«Малый»} = \left\{\mu_{\text{Малый}}(n) = \frac{1}{1 + (n/10)^2}/n\right\}.$$

3. Пусть $E = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ и соответствует понятию «Возраст», тогда нечеткое множество «Молодой» может быть определено с помощью

$$\mu_{\text{Молодой}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 25], \\ \dfrac{1}{1 + \big((x-25)/5\big)^2}, & x > 25. \end{cases}$$

Нечеткое множество «Молодой» на универсальном множестве $E' = \{ИВАНОВ, ПЕТРОВ, СИДОРОВ, \ldots\}$ задается с помощью функции принадлежности $\mu_{Молодой}(x)$ на $E = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 100\}$ (возраст), называемой по отношению к E' функцией совместимости, при этом:

$$\mu_{Молодой}(СИДОРОВ) := \mu_{Молодой}(x),$$

где x — возраст СИДОРОВА.

4. Пусть $E = \{ЗАПОРОЖЕЦ, ЖИГУЛИ, МЕРСЕДЕС, \ldots\}$ — множество марок автомобилей, а $E' = [0,\ \infty)$ — универсальное множество «Стоимость», тогда на E' мы можем определить нечеткие множества типа:

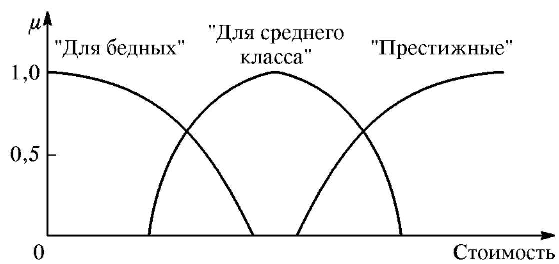

Рис. 1.1. Примеры функций принадлежности

«Для бедных», «Для среднего класса», «Престижные», с функциями принадлежности вида рис. 1.1.

Имея эти функции и зная стоимости автомобилей из E в данный момент времени, мы тем самым определим на E' нечеткие множества с этими же названиями.

Так, например, нечеткое множество «Для бедных», заданное на универсальном множестве $E = \{ЗАПОРОЖЕЦ, ЖИГУЛИ, МЕРСЕДЕС, \ldots\}$, выглядит так, как показано на рис. 1.2.

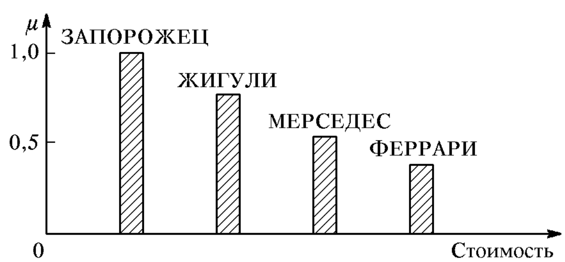

Рис. 1.2. Пример задания нечеткого множества

Аналогично можно определить нечеткое множество «Скоростные», «Средние», «Тихоходные» и т. д.

5. Пусть E — множество целых чисел:

$$E = \{-8,\ -5,\ -3,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 9\}.$$

Тогда нечеткое подмножество чисел, по абсолютной величине близких к нулю, можно определить, например, так:

$$A = \{0/-8+0{,}5/-5+0{,}6/-3+1/0+0{,}9/1+0{,}8/2+0{,}6/4+0{,}3/6+0/9\}.$$

1.1.2. О методах построения функций принадлежности нечетких множеств. В приведенных выше примерах использованы *прямые* методы, когда эксперт либо просто задает для каждого $x \in E$ значение $\mu_A(x)$, либо определяет функцию совместимости. Как правило, прямые методы задания функции принадлежности используются для измеримых понятий, таких как скорость, время, расстояние, давление, температура и т. д., или когда выделяются полярные значения.

Во многих задачах при характеристике объекта можно выделить набор признаков и для каждого из них определить полярные значения, соответствующие значениям функции принадлежности, 0 или 1.

Например, в задаче распознавания лиц можно выделить шкалы, приведенные в табл. 1.1.

Таблица 1.1. **Шкалы в задаче распознавания лиц**

		0	1
x_1	высота лба	низкий	высокий
x_2	профиль носа	курносый	горбатый
x_3	длина носа	короткий	длинный
x_4	разрез глаз	узкие	широкие
x_5	цвет глаз	светлые	темные
x_6	форма подбородка	остроконечный	квадратный
x_7	толщина губ	тонкие	толстые
x_8	цвет лица	темный	светлый
x_9	очертание лица	овальное	квадратное

Для конкретного лица A эксперт, исходя из приведенной шкалы, задает $\mu_A(x) \in [0,\ 1]$, формируя векторную функцию принадлежности $\{\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2),\ \ldots,\ \mu_A(x_9)\}$.

При прямых методах используются также групповые прямые методы, когда, например, группе экспертов предъявляют конкретное лицо и каждый должен дать один из двух ответов: «этот человек лысый» или «этот человек не лысый», тогда количество утвердительных ответов, деленное на общее число экспертов, дает значение $\mu_{\text{лысый}}$ (данного лица). (В этом примере можно действовать через функцию совместимости, но тогда придется считать число волосинок на голове у каждого из предъявленных эксперту лиц.)

Косвенные методы определения значений функции принадлежности используются в случаях, когда нет элементарных измеримых свойств, через которые определяется интересующее нас нечеткое множество. Как правило, это методы попарных сравнений. Если бы значения функций принадлежности были нам известны, например, $\mu_A(x_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то попарные сравнения можно представить матрицей отношений $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, где $a_{ij} = w_i/w_j$ (операция деления).

На практике эксперт сам формирует матрицу $\mathbf{A}$, при этом предполагается, что диагональные элементы равны 1, а для элементов симметричных относительно диагонали $a_{ij} = 1/a_{ij}$, т. е. если один элемент оценивается в α раз сильнее, чем другой, то этот последний должен быть в $1/\alpha$ раз сильнее, чем первый. В общем случае задача сводится к поиску вектора $\mathbf{w}$, удовлетворяющего уравнению вида $\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda_{\max}\mathbf{w}$, где $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $\mathbf{A}$. Поскольку матрица $\mathbf{A}$ положительна по построению, решение данной задачи существует и является положительным.

Можно отметить еще два подхода:

• *использование типовых форм* кривых для задания функций принадлежности (в форме (L–R)-типа — см. ниже) с уточнением их параметров в соответствии с данными эксперимента;

• *использование относительных частот* по данным эксперимента в качестве значений принадлежности.

1.2. Операции над нечеткими множествами

1.2.1. Логические операции

Включение. Пусть A и B — нечеткие множества на универсальном множестве E. Говорят, что A содержится в B, если $\forall x \in E\ \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$.

Обозначение: $A \subset B$.

Иногда используют термин *доминирование*, т. е. в случае, когда $A \subset B$, говорят, что B доминирует A.

Равенство. A и B равны, если $\forall x \in E\ \mu_A(x) = \mu_B(x)$.

Обозначение: $A = B$.

Дополнение. Пусть $M = [0, 1]$, A и B — нечеткие множества, заданные на E. A и B дополняют друг друга, если $\forall x \in E\ \mu_A(x) = 1 \Leftrightarrow \mu_B(x)$.

Обозначение: $B = \overline{A}$ или $A = \overline{B}$.

Очевидно, что $\overline{\overline{A}} = A$ (дополнение определено для $M = [0,\,1]$, но очевидно, что его можно определить для любого упорядоченного M).

Пересечение. $A \cap B$ — наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\big(\mu_A(x),\, \mu_B(x)\big).$$

Объединение. $A \cup B$ — наименьшее нечеткое подмножество, включающее как A, так и B, с функцией принадлежности:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\big(\mu_A(x),\, \mu_B(x)\big).$$

Разность. $A \Leftrightarrow B = A \cap \overline{B}$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A\cap\overline{B}}(x) = \min\big(\mu_A(x),\, 1 \Leftrightarrow \mu_B(x)\big).$$

Дизъюнктивная сумма

$$A \oplus B = (A \Leftrightarrow B) \cup (B \Leftrightarrow A) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

с функцией принадлежности:
$\mu_{A-B}(x) = \max\big(\min\,(\mu_A(x),\, 1 \Leftrightarrow \mu_B(x));\, \min\,(1 \Leftrightarrow \mu_A(x),\, \mu_B(x))\big)$.

Примеры. Пусть

$$A = 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4;$$
$$B = 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4;$$
$$C = 0{,}1/x_1 + 1/x_2 + 0{,}2/x_3 + 0{,}9/x_4.$$

Здесь:

1) $A \subset B$, т. е. A содержится в B или B доминирует A; C *несравнимо* ни с A, ни с B, т. е. пары $\{A,\, C\}$ и $\{A,\, C\}$ — пары недоминируемых нечетких множеств.

2) $A \neq B \neq C$.

3) $\overline{A} = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4$; $\overline{B} = 0{,}3/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0{,}9/x_3 + 0/x_4$.

4) $A \cap B = 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$.

5) $A \cup B = 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4$.

6) $A - B = A \cap \overline{B} = 0{,}3/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4$; $B - A = \overline{A} \cap B = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 0{,}1/x_3 + 0/x_4$.

7) $A \oplus B = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 0{,}1/x_3 + 0/x_4$.

Наглядное представление логических операций над нечеткими множествами. Для нечетких множеств можно строить визуальное представление. Рассмотрим прямоугольную систему координат, на оси ординат которой откладываются значения $\mu_A(x)$, на оси абсцисс в произвольном порядке расположены элементы E (мы уже использовали такое представление в примерах нечетких множеств). Если E по своей природе упорядочено, то этот порядок желательно сохранить в расположении

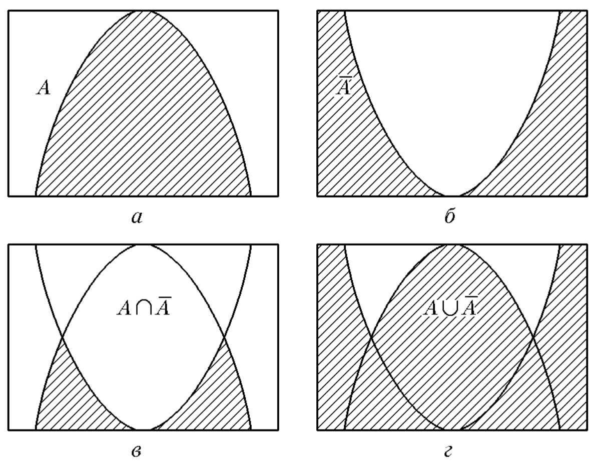

Рис. 1.3. Графическая интерпретация логических операций: *а* — нечеткое множество A; *б* — нечеткое множество $\overline{A}$; *в* — $A \cap \overline{A}$; *г* — $A \cup \overline{A}$

элементов на оси абсцисс. Такое представление делает наглядными простые логические операции над нечеткими множествами (см. рис. 1.3).

На рис. 1.3*а* заштрихованная часть соответствует нечеткому множеству A и, если говорить точно, изображает область значений A и всех нечетких множеств, содержащихся в A. На рис. 1.3*б, в, г* даны $\overline{A}$, $A \cap \overline{A}$, $A \cup \overline{A}$.

Свойства операций $\cup$ и $\cap$

Пусть A, B, C — нечеткие множества, тогда выполняются следующие свойства:

1) $\left.\begin{aligned} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{aligned}\right\}$ — *коммутативность*;

2) $\left.\begin{aligned} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{aligned}\right\}$ — *ассоциативность*;

3) $\left.\begin{array}{l} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{array}\right\}$ — *идемпотентность*;

4) $\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\}$ — *дистрибутивность*;

5) $A \cup \varnothing = A$, где $\varnothing$ — *пустое множество*, т.е. $\mu_\varnothing(x) = 0$ $\forall x \in E$;

6) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

7) $A \cap E = A$, где E — *универсальное множество*;

8) $A \cup E = E$;

9) $\left.\begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}\right\}$ — *теоремы де Моргана.*

В отличие от четких множеств, для нечетких множеств в общем случае:

$$A \cap \overline{A} \neq \varnothing, \quad A \cup \overline{A} \neq E$$

(что, в частности, проиллюстрировано выше в примере наглядного представления нечетких множеств).

Замечание. Введенные выше операции над нечеткими множествами основаны на использовании операций max и min. В теории нечетких множеств разрабатываются вопросы построения обобщенных, параметризованных операторов пересечения, объединения и дополнения, позволяющих учесть разнообразные смысловые оттенки соответствующих им связок «и», «или», «не».

Один из подходов к операторам пересечения и объединения заключается в их определении в *классе треугольных норм и конорм.*

Треугольной нормой (*t-нормой*) называется двуместная действительная функция $T\colon [0,\,1] \times [0,\,1] \to [0,\,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $T(0,\,0) = 0$; $T(\mu_A,\,1) = \mu_A$; $T(1,\,\mu_A) = \mu_A$ — *ограниченность*;

2) $T(\mu_A,\,\mu_B) \leqslant T(\mu_C,\,\mu_D)$, если $\mu_A \leqslant \mu_C$, $\mu_B \leqslant \mu_D$ — *монотонность*;

3) $T(\mu_A,\,\mu_B) = T(\mu_B,\,\mu_A)$ — *коммутативность*;

4) $T\big(\mu_A,\,T(\mu_B,\,\mu_C)\big) = T\big(T(\mu_A,\,\mu_B),\,\mu_C\big)$ — *ассоциативность*;

Примеры треугольных норм

$$\min(\mu_A,\,\mu_B)$$
$$\text{произведение } \mu_A \cdot \mu_B$$
$$\max(0,\,\mu_A + \mu_B - 1).$$

Треугольной конормой (*t-конормой*) называется двуместная действительная функция $S\colon[0,\,1]\times[0,\,1]\to[0,\,1]$ со свойствами:

1) $S(1,\,1)=1$; $S(\mu_A,\,0)=\mu_A$; $S(0,\,\mu_A)=\mu_A$ — *ограниченность*;

2) $S(\mu_A,\,\mu_B)\geqslant S(\mu_C,\,\mu_D)$, если $\mu_A\geqslant\mu_C$, $\mu_B\geqslant\mu_D$ — *монотонность*;

3) $S(\mu_A,\,\mu_B)=S(\mu_B,\,\mu_A)$ — *коммутативность*;

4) $S\bigl(\mu_A,\,S(\mu_B,\,\mu_C)\bigr)=S\bigl(S(\mu_A,\,\mu_B),\,\mu_C\bigr)$ — *ассоциативность*.

Примеры t-конорм

$$\begin{aligned}&\max(\mu_A,\,\mu_B)\\&\mu_A+\mu_B-\mu_A\cdot\mu_B\\&\min(1,\,\mu_A+\mu_B).\end{aligned}$$

1.2.2. Алгебраические операции над нечеткими множествами

Алгебраическое произведение A и B обозначается $A\cdot B$ и определяется так: $\forall x\in E\ \ \mu_{A\cdot B}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x)$.

Алгебраическая сумма этих множеств обозначается $A\hat{+}B$ и определяется так: $\forall x\in E\ \ \mu_{A\hat{+}B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)\Leftrightarrow\mu_A(x)\mu_B(x)$.

Для операций $\{\cdot,\,\hat{+}\}$ выполняются свойства:

1) $\left.\begin{aligned}A\cdot B=B\cdot A\\A\hat{+}B=B\hat{+}A\end{aligned}\right\}$ — *коммутативность*;

2) $\left.\begin{aligned}(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)\\(A\hat{+}B)\hat{+}C=A\hat{+}(B\hat{+}C)\end{aligned}\right\}$ — *ассоциативность*;

3) $A\cdot\varnothing=\varnothing$, $A\hat{+}\varnothing=A$, $A\cdot E=A$, $A\hat{+}E=E$;

4) $\left.\begin{aligned}\overline{A\cdot B}=\overline{A}\hat{+}\overline{B}\\\overline{A\hat{+}B}=\overline{A}\cdot\overline{B}\end{aligned}\right\}$ — *теоремы де Моргана*.

Не выполняются:

1) $\left.\begin{aligned}A\cdot A=A\\A\hat{+}A=A\end{aligned}\right\}$ — *идемпотентность*;

2) $\left.\begin{aligned}A\cdot(B\hat{+}C)=(A\cdot B)\hat{+}(A\cdot C)\\A\hat{+}(B\cdot C)=(A\hat{+}B)\cdot(A\hat{+}C)\end{aligned}\right\}$ — *дистрибутивность*;

3) а также $A\cdot\overline{A}=\varnothing$, $A\hat{+}\overline{A}=E$.

Замечание. При совместном использовании операций $\{\cup,\,\cap,\,\hat{+},\,\cdot\}$ выполняются свойства:

1) $A\cdot(B\cup C)=(A\cdot B)\cup(A\cdot C)$;

2) $A\cdot(B\cap C)=(A\cdot B)\cap(A\cdot C)$;

3) $A\hat{+}(B \cup C) = (A\hat{+}B) \cup (A\hat{+}C)$;

4) $A\hat{+}(B \cap C) = (A\hat{+}B) \cap (A\hat{+}C)$.

На основе операции алгебраического произведения определяется операция *возведения в степень* α нечеткого множества A, где α — положительное число. Нечеткое множество A^α определяется функцией принадлежности $\mu_A^\alpha = \mu_A^\alpha(x)$. Частным случаем возведения в степень являются:

1) $\mathrm{CON}\,(A) = A^2$ — операция *концентрирования* (*уплотнения*);

2) $\mathrm{DIL}\,(A) = A^{0,5}$ — операция *растяжения*,
которые используются при работе с лингвистическими неопределенностями (рис. 1.4).

Умножение на число. Если α — положительное число, такое, что $\alpha \max\limits_{x \in A} \mu_A(x) \leqslant 1$, то нечеткое множество αA имеет функцию принадлежности:

$$\mu_{\alpha A}(x) = \alpha \mu_A(x).$$

Выпуклая комбинация нечетких множеств. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ ..., A_n — нечеткие множества универсального множества E, а ω_1, ω_2, ..., ω_n — неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

Выпуклой комбинацией A_1, A_2, ..., A_n называется нечеткое множество A с функцией принадлежности:

$$\forall x \in E \;\; \mu_A(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = \omega_1 \mu_{A1}(x) + \omega_2 \mu_{A2}(x) + \ldots + \omega_n \mu_{Ai}(x).$$

Декартово (прямое) произведение нечетких множеств. Пусть A_1, A_2, ..., A_n — нечеткие подмножества универсальных множеств E_1, E_2, ..., E_n соответственно. Декартово, или прямое

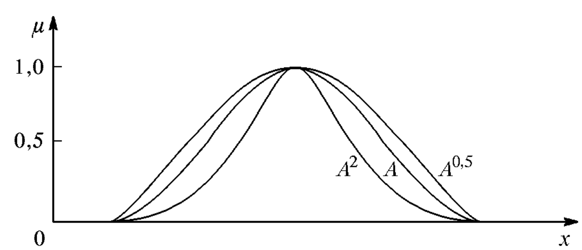

Рис. 1.4. Иллюстрация к понятию операций концентрирования (уплотнения) и растяжения

произведение $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ является нечетким подмножеством множества $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ с функцией принадлежности:

$$\mu_A(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = \min\big(\mu_{A1}(x_1),\, \mu_{A2}(x_2),\, \ldots,\, \mu_{Ai}(x_n)\big).$$

Оператор увеличения нечеткости используется для преобразования четких множеств в нечеткие и для увеличения нечеткости нечеткого множества.

Пусть A — нечеткое множество, E — универсальное множество и для всех $x \in E$ определены нечеткие множества $K(x)$. Совокупность всех $K(x)$ называется ядром оператора увеличения нечеткости Φ. Результатом действия оператора Φ на нечеткое множество A является нечеткое множество вида

$$\Phi(A,\, K) = \bigcup_{x \in E} \mu_A(x) K(x),$$

где $\mu_A(x)K(x)$ — произведение числа на нечеткое множество.

Пример. Пусть

$$E = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}; \;\; A = 0{,}8/1 + 0{,}6/2 + 0/3 + 0/4; \;\; K(1) = 1/1 + 0{,}4/2;$$
$$K(2) = 1/2 + 0{,}4/1 + 0{,}4/3; \;\; K(3) = 1/3 + 0{,}5/4; \;\; K(4) = 1/4.$$

Тогда

$$\Phi(A,\, K) = \mu_A(1)K(1) \cup \mu_A(2)K(2) \cup \mu_A(3)K(3) \cup \mu_A(4)K(4) =$$
$$= 0{,}8(1/1 + 0{,}4/2) \cup 0{,}6(1/2 + 0{,}4/1 + 0{,}4/3) = 0{,}8/1 + 0{,}6/2 + 0{,}24/3.$$

Четкое множество α-уровня (*или уровня α*). Множеством α-уровня нечеткого множества A универсального множества E называется *четкое* подмножество A_α универсального множества E, определяемое в виде

$$A_\alpha = \{x / \mu_A(x) \geqslant \alpha\},$$

где $\alpha \leqslant 1$.

Пример. Пусть $A = 0{,}2/x_1 + 0/x_2 + 0{,}5/x_3 + 1/x_4$, тогда $A_{0,3} = \{x_3,\, x_4\}$, $A_{0,7} = \{x_4\}$.

Достаточно очевидное свойство: если $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$, то $A_{\alpha 1} \leqslant A_{\alpha 2}$.

1.3. Нечеткая и лингвистическая переменные

Понятие нечеткой и лингвистической переменных используется при описании объектов и явлений с помощью нечетких множеств.

Нечеткая переменная характеризуется тройкой $\langle \alpha,\, X,\, A \rangle$, где
α — наименование переменной;
X — универсальное множество (область определения α);

A — нечеткое множество на X, описывающее ограничения (т. е. $\mu_A(x)$) на значения нечеткой переменной α.

Лингвистической переменной (ЛП) называется набор $\langle\beta, T, X, \mathrm{G}, M\rangle$, где

β — наименование лингвистической переменной;

T — множество ее значений (терм-множество), представляющих собой наименования нечетких переменных, областью определения каждой из которых является множество X. Множество T называется базовым *терм-множеством* лингвистической переменной;

G — синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами терм-множества T, в частности, генерировать новые термы (значения). Множество $T \cup \mathrm{G}(T)$, где $\mathrm{G}(T)$ — множество сгенерированных термов, называется расширенным терм-множеством лингвистической переменной;

M — семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой G, в нечеткую переменную, т. е. сформировать соответствующее нечеткое множество.

Замечание. Чтобы избежать большого количества символов:

1) символ β используют как для названия самой переменной, так и для всех ее значений;

2) пользуются одним и тем же символом для обозначения нечеткого множества и его названия, например терм «Молодой», являющийся значением лингвистической переменной $\beta =$ «возраст», одновременно есть и нечеткое множество M («Молодой»).

Присвоение нескольких значений символам предполагает, что контекст позволяет разрешить возможные неопределенности.

Пример. Пусть эксперт определяет толщину выпускаемого изделия с помощью понятий «Малая толщина», «Средняя толщина» и «Большая толщина», при этом минимальная толщина равна 10 мм, а максимальная — 80 мм.

Формализация такого описания может быть проведена с помощью следующей лингвистической переменной $\langle\beta, T, X, \mathrm{G}, M\rangle$, где

β — толщина изделия;

T — {«Малая толщина», «Средняя толщина», «Большая толщина»};

X — $[10, 80]$;

G — процедура образования новых термов с помощью связок «и», «или» и модификаторов типа «очень», «не», «слегка» и т. п. Например: «Малая или средняя толщина», «Очень малая толщина» и т. д.;

M — процедура задания на $X = [10, 80]$ нечетких подмножеств $A_1 =$ «Малая толщина», $A_2 =$ «Средняя толщина», $A_3 =$ «Большая толщина», а также нечетких множеств для термов из $\mathrm{G}(T)$ в соответствии с правилами трансляции нечетких связок и модификаторов «и», «или», «не», «очень», «слегка» и других операций над нечеткими множествами вида: $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\mathrm{CON}\, A = A^2$, $\mathrm{DIL}\, A = A^{0,5}$ и т. п.

Замечание. Наряду с рассмотренными выше базовыми значениями лингвистической переменной «Толщина» ($T = \{$«Малая толщина», «Средняя толщина», «Большая толщина»$\}$) возможны значения, зависящие от области определения X. В данном случае значения лингвистической переменной «Толщина изделия» могут быть определены как «около 20 мм», «около 50 мм», «около 70 мм», т. е. в виде нечетких чисел.

Терм-множество и расширенное терм-множество в условиях примера можно характеризовать функциями принадлежности, приведенными на рис. 1.5 и 1.6.

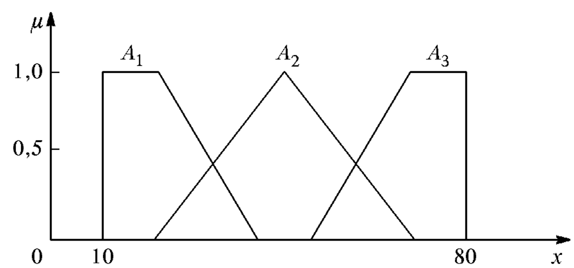

Рис. 1.5. Функции принадлежности нечетких множеств: «Малая толщина» = A_1, «Средняя толщина» = A_2, «Большая толщина» = A_3

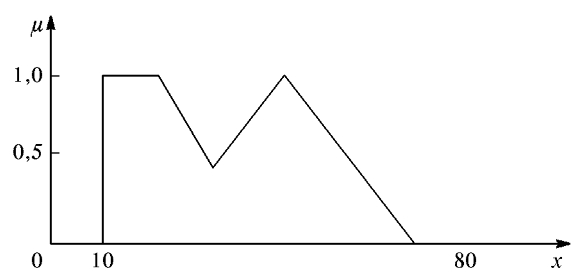

Рис. 1.6. Функция принадлежности нечеткого множества «Малая или средняя толщина» = $A_1 \cup A_2$

1.3.1. Нечеткие числа

Нечеткие числа — нечеткие переменные, определенные на числовой оси, т. е. нечеткое число определяется как нечеткое множество A на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ с функцией принадлежности $\mu_A(x) \in [0, 1]$, где x — действительное число, т. е. $x \in \mathbb{R}$.

Нечеткое число A *нормально*, если $\max\limits_{x} \mu_A(x) = 1$; *выпуклое*, если для любых $x \leqslant y \leqslant z$ выполняется

$$\mu_A(x) \geqslant \mu_A(y) \wedge \mu_A(z).$$

Множество α-уровня нечеткого числа A определяется как

$$A\alpha = \{x/\mu_A(x) \geqslant \alpha\}.$$

Подмножество $S_A \subset \mathbb{R}$ называется носителем нечеткого числа A, если

$$S_A = \{x/\mu_A(x) > 0\}.$$

Нечеткое число A *унимодально*, если условие $\mu_A(x) = 1$ справедливо только для одной точки действительной оси.

Выпуклое нечеткое число A называется *нечетким нулем*, если

$$\mu_A(0) = \sup_x \big(\mu_A(x)\big).$$

Нечеткое число A *положительно*, если $\forall x \in S_A,\ x > 0$ и *отрицательно*, если $\forall x \in S_A,\ x < 0$.

1.3.2. Операции над нечеткими числами. Расширенные бинарные арифметические операции (сложение, умножение и пр.) для нечетких чисел определяются через соответствующие операции для четких чисел с использованием принципа обобщения следующим образом.

Пусть A и B — нечеткие числа, и $\tilde{*}$ — нечеткая операция, соответствующая произвольной алгебраической операции $*$ над обычными числами. Тогда (используя здесь и в дальнейшем обозначения $\bigvee\limits_x$ вместо $\max\limits_x$ и $\bigwedge\limits_x$ вместо $\min\limits_x$) можно записать

$$C = A\tilde{*}B \Leftrightarrow \mu_C(z) = \bigvee_{Z=X*Y} \big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\big).$$

Отсюда

$$C = A\tilde{+}B \Leftrightarrow \mu_C(z) = \bigvee_{Z=X+Y} \big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\big),$$

$$C = A\tilde{\Leftrightarrow}B \Leftrightarrow \mu_C(z) = \bigvee_{Z=X-Y} \big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\big),$$

$$C = A\tilde{\cdot}B \Leftrightarrow \mu_C(z) = \bigvee_{Z=X\cdot Y} \big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\big),$$

$$C = A\tilde{\div}B \Leftrightarrow \mu_C(z) = \bigvee_{Z=X\div Y} \big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\big),$$

$$C = \tilde{\max}\,(A,\,B) \Leftrightarrow \mu_C(z) = \bigvee_{Z=\max\,(X,Y)} \bigl(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\bigr),$$

$$C = \tilde{\min}\,(A,\,B) \Leftrightarrow \mu_C(z) = \bigvee_{Z=\min\,(X,Y)} \bigl(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\bigr).$$

1.3.3. Нечеткие числа (L–R)-типа. Нечеткие числа (L–R)-типа — это разновидность нечетких чисел специального вида, т. е. задаваемых по определенным правилам с целью снижения объема вычислений при операциях над ними.

Функции принадлежности нечетких чисел (L–R)-типа задаются с помощью невозрастающих на множестве неотрицательных действительных чисел функций действительного переменного $\mathrm{L}(x)$ и $\mathrm{R}(x)$, удовлетворяющих свойствам:

а) $\mathrm{L}(\Leftrightarrow x) = \mathrm{L}(x)$, $\mathrm{R}(\Leftrightarrow x) = \mathrm{R}(x)$;

б) $\mathrm{L}(0) = \mathrm{R}(0)$.

Очевидно, что к классу (L–R)-функций относятся функции, графики которых имеют вид, приведенный на рис. 1.7.

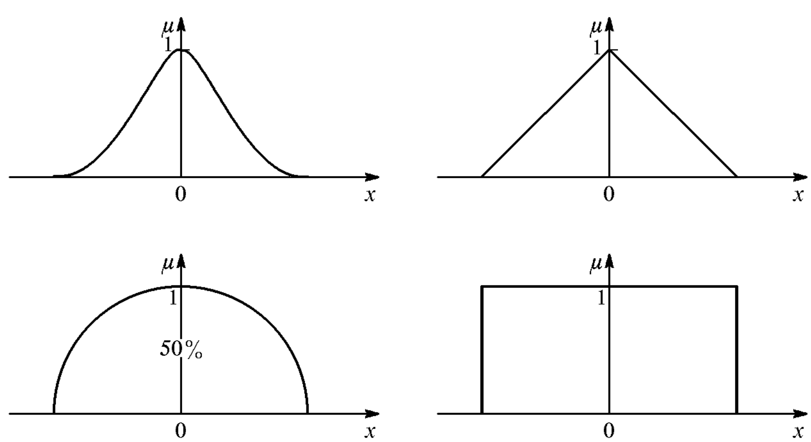

Рис. 1.7. Возможный вид (L–R)-функций

Примерами аналитического задания (L–R)-функций могут быть

$$\mathrm{L}(x) = e^{-|X|^p}, \quad p \geqslant 0; \qquad \mathrm{R}(x) = \frac{1}{1+|x|^p}, \quad p \geqslant 0,$$

и т. д.

Пусть $\mathrm{L}(y)$ и $\mathrm{R}(y)$ — функции (L–R)-типа (конкретные). Унимодальное нечеткое число A с *модой* a (т. е. $\mu_A(a) = 1$) с помощью

$L(y)$ и $R(y)$ задается следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a \Leftrightarrow x}{\alpha}\right) & \text{при} \quad x \leqslant a, \\ R\left(\dfrac{x \Leftrightarrow a}{\beta}\right) & \text{при} \quad x > a, \end{cases}$$

где a — мода; $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — левый и правый коэффициенты нечеткости.

Таким образом, при заданных $L(y)$ и $R(y)$ нечеткое число (унимодальное) задается тройкой $A = (a, \alpha, \beta)$.

Толерантное нечеткое число задается, соответственно, четверкой параметров $A = (a_1, a_2, \alpha, \beta)$, где a_1 и a_2 — границы толерантности, т. е. в промежутке $[a_1, a_2]$ значение функции принадлежности равно 1.

Примеры графиков функций принадлежности нечетких чисел (L–R)-типа приведены на рис. 1.8.

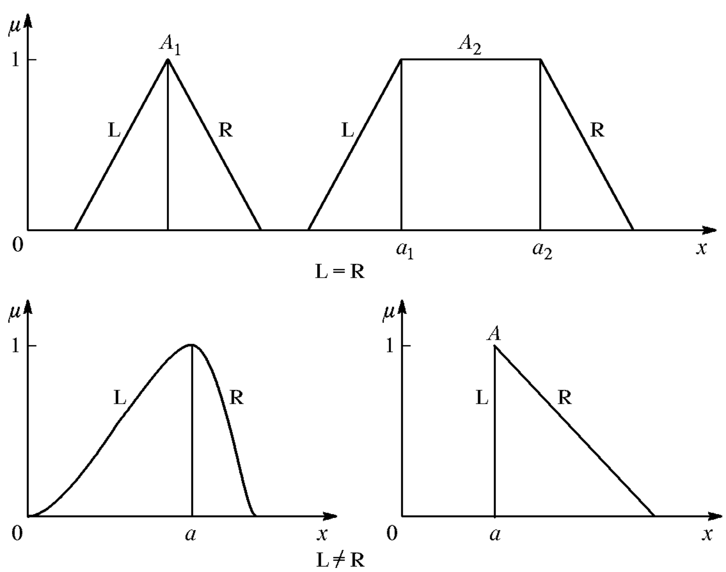

Рис. 1.8. Примеры графиков функций принадлежности нечетких чисел (L–R)-типа

Отметим, что в конкретных ситуациях функции $L(y)$, $R(y)$, а также параметры α, β нечетких чисел (a, α, β) и $(a_1, a_2, \alpha, \beta)$

должны подбираться таким образом, чтобы результат операции (сложения, вычитания, деления и т. д.) был точно или приблизительно равен нечеткому числу с теми же $\mathrm{L}(y)$ и $\mathrm{R}(y)$, а параметры α' и β' результата не выходили за рамки ограничений на эти параметры для исходных нечетких чисел, особенно если результат в дальнейшем будет участвовать в операциях.

Замечание. Решение задач математического моделирования сложных систем с применением аппарата нечетких множеств требует выполнения большого объема операций над разного рода лингвистическими и другими нечеткими переменными. Для удобства исполнения операций, а также для ввода-вывода и хранения данных, желательно работать с функциями принадлежности стандартного вида.

Нечеткие множества, которыми приходится оперировать в большинстве задач, являются, как правило, унимодальными и нормальными. Одним из возможных методов аппроксимации унимодальных нечетких множеств является аппроксимация с помощью функций (L–R)-типа.

Примеры (L–R)-представлений некоторых лингвистических переменных приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2. **Возможное (L–R)-представление некоторых лингвистических переменных**

Терм ЛП	(L–R)-представление	Графическое представление
Средний	$A = (a,\, \alpha,\, \beta)_{\mathrm{LR}}$ $\alpha = \beta > 0$	α β
Малый	$A = (a,\, \infty,\, \beta)_{\mathrm{LR}}$ $\alpha = \infty$	$\alpha = \infty$ β
Большой	$A = (a,\, \alpha,\, \infty)_{\mathrm{LR}}$ $\beta = \infty$	α $\beta = \infty$
Приблизительно в диапазоне	$A = (a_1,\, a_2,\, \alpha,\, \beta)_{\mathrm{LR}}$ $\alpha = \beta > 0$	α β a_1 a_2
Определенный	$A = (a,\, 0,\, 0)_{\mathrm{LR}}$ $\alpha = \beta = 0$	$\alpha = 0$ $\beta = 0$
Разнообразный: зона полной неопределенности	$A = (a,\, \infty,\, \infty)_{\mathrm{LR}}$ $\alpha = \beta = \infty$	$\alpha = \beta = \infty$

1.4. Нечеткие отношения

Пусть $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ — прямое произведение универсальных множеств и M — некоторое множество принадлежностей (например, $M = [0, 1]$). Нечеткое n-арное отношение определяется как нечеткое подмножество R на E, принимающее свои значения в M. В случае $n = 2$ и $M = [0, 1]$ нечетким отношением R между множествами $X = E_1$ и $Y = E_2$ будет называться функция $R: (X, Y) \to [0, 1]$, которая ставит в соответствие каждой паре элементов $(x, y) \in X \times Y$ величину $\mu_R(x, y) \in [0, 1]$.

Обозначение: нечеткое отношение на $X \times Y$ запишется в виде

$$x \in X,\ y \in Y :\ xRy.$$

В случае, когда $X = Y$, т.е. X и Y совпадают, нечеткое отношение $R: X \times X \to [0, 1]$ называется нечетким отношением на множестве X.

Примеры

1) Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $M = [0, 1]$. Нечеткое отношение $R = XRY$ может быть задано, к примеру, табл. 1.3.

Таблица 1.3. **Задание нечеткого отношения**

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0,1	0,3
x_2	0	0,8	1	0,7
x_3	1	0,5	0,6	1

2) Пусть $X = Y = (-\infty, \infty)$, т.е. множество всех действительных чисел. Отношение $x \gg y$ (x много больше y) можно задать функцией принадлежности:

$$\mu_R = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant y, \\ \dfrac{1}{1 + (1/(x-y)^2)}, & \text{если} \quad y < x. \end{cases}$$

3) Отношение R, для которого $\mu_R(x, y) = e^{-k(x-y)^2}$, при достаточно больших k можно интерпретировать так: «x и y близкие друг к другу числа».

1.4.1. Операции над нечеткими отношениями

Объединение двух отношений R_1 *и* R_2. Объединение двух отношений обозначается $R_1 \cup R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \vee \mu_{R_2}(x, y).$$

Пересечение двух отношений. Пересечение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cap R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(x, y).$$

Алгебраическое произведение двух отношений. Алгебраическое произведение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cdot R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(x, y).$$

Алгебраическая сумма двух отношений. Алгебраическая сумма двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \hat{+} R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \hat{+} R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) + \mu_{R_2}(x, y) \Leftrightarrow \mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(x, y).$$

Для введенных операций справедливы следующие свойства дистрибутивности:

$$R_1 \cap (R_2 \cup R_3) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_3),$$
$$R_1 \cup (R_2 \cap R_3) = (R_1 \cup R_2) \cap (R_1 \cup R_3),$$
$$R_1 \cdot (R_2 \cup R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cup (R_1 \cdot R_3),$$
$$R_1 \cdot (R_2 \cap R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cap (R_1 \cdot R_3),$$
$$R_1 \hat{+} (R_2 \cup R_3) = (R_1 \hat{+} R_2) \cup (R_1 \hat{+} R_3),$$
$$R_1 \hat{+} (R_2 \cap R_3) = (R_1 \hat{+} R_2) \cap (R_1 \hat{+} R_3).$$

Дополнение отношения. Дополнение отношения R обозначается $\overline{R}$ и определяется функцией принадлежности:

$$\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 \Leftrightarrow \mu_R(x, y).$$

Дизъюнктивная сумма двух отношений. Дизъюнктивная сумма двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \oplus R_2$ и определяется выражением

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cap \overline{R}_2) \cup (\overline{R}_1 \cap R_2).$$

Обычное отношение, ближайшее к нечеткому. Пусть R — нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$. Обычное отношение, ближайшее к нечеткому, обозначается $\underline{R}$ и определяется выражением

$$\mu_{\underline{R}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_R(x, y) < 0{,}5, \\ 1, & \text{если} \quad \mu_R(x, y) > 0{,}5, \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если} \quad \mu_R(x, y) = 0{,}5. \end{cases}$$

По договоренности принимают $\mu_{\underline{R}}(x,\, y) = 0$ при $\mu_R(x,\, y) = 0{,}5$.

Композиция (свертка) двух нечетких отношений. Пусть R_1 — нечеткое отношение R_1: $(X \times Y) \to [0,\, 1]$ между X и Y, и R_2 — нечеткое отношение R_2: $(Y \times Z) \to [0,\, 1]$ между Y и Z. Нечеткое отношение между X и Z, обозначаемое $R_2 \circ R_1$, определенное через R_1 и R_2 выражением

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,\, z) = \bigvee_y \big(\mu_{R_1}(x,\, y) \wedge \mu_{R_1}(y,\, z)\big),$$

называется (max–min)-композицией ((max–min)-сверткой) отношений R_1 и R_2.

П р и м е р. Пусть

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

Тогда

$R_1 \circ R_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

При этом

$$\begin{aligned}\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1,\, z_1) &= \big(\mu_{R_1}(x_1,\, y_1) \wedge \mu_{R_2}(y_1,\, z_1)\big) \vee \\ &\vee \big(\mu_{R_1}(x_1,\, y_2) \wedge \mu_{R_2}(y_2,\, z_1)\big) \vee \big(\mu_{R_1}(x_1,\, y_3) \wedge \mu_{R_2}(y_3,\, z_1)\big) = \\ &= (0{,}1 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}4 \wedge 0{,}1) = 0{,}1 \vee 0{,}3 \vee 0{,}1 = 0{,}3;\end{aligned}$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1,\, z_3) = 0{,}1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2,\, z_5) = 0{,}5.$$

З а м е ч а н и е. В данном примере вначале использован «аналитический» способ композиции отношений R_1 и R_2, т. е. i-я строка R_1 «умножается» на j-й столбец R_2 с использованием операции $\wedge$, полученный результат «свертывается» с использованием операции $\vee$ в $\mu(x_i,\, z_j)$.

Свойства (max–min)-*композиции.* Операция (max–min)-композиции ассоциативна, т. е.

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1,$$

дистрибутивна относительно объединения, но недистрибутивна относительно пересечения:

$$R_3 \circ (R_2 \cup R_1) = (R_3 \circ R_2) \cup (R_3 \circ R_1),$$
$$R_3 \circ (R_2 \cap R_1) \neq (R_3 \circ R_2) \cap (R_3 \circ R_1).$$

Кроме того, для (max–min)-композиции выполняется следующее важное свойство: если $R_1 \subset R_2$, то $R \circ R_1 \subset R \circ R_2$.

max-*композиция.* В выражении

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,\, z) = \bigvee_y \bigl(\mu_{R_1}(x,\, y) \wedge \mu_{R_2}(y,\, z)\bigr)$$

для (max–min)-композиции отношений R_1 и R_2 операцию $\wedge$ можно заменить любой другой, для которой выполняются те же ограничения, что и для $\wedge$: ассоциативность и монотонность (в смысле неубывания) по каждому аргументу. Тогда

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,\, z) = \bigvee_y \bigl(\mu_{R_1}(x,\, y) * \mu_{R_1}(y,\, z)\bigr).$$

В частности, операция $\wedge$ может быть заменена алгебраическим умножением, тогда говорят о (max–prod)-композиции.

1.5. Нечеткие выводы

Используемый в различного рода экспертных и управляющих системах механизм нечетких выводов в своей основе имеет базу знаний, формируемую специалистами предметной области в виде совокупности нечетких предикатных правил вида:

П$_1$: если x есть А$_1$, тогда y есть В$_1$,
П$_2$: если x есть А$_2$, тогда y есть В$_2$,
. . . .
П$_n$: если x есть А$_n$, тогда y есть В$_n$,

где x — входная переменная (имя для известных значений данных), y — переменная вывода (имя для значения данных, которое будет вычислено); А и В — функции принадлежности, определенные соответственно на x и y.

Пример подобного правила
Если x — низко, то y — высоко.

Приведем более детальное пояснение. Знание эксперта А $\to$ В отражает нечеткое причинное отношение предпосылки и заключения, поэтому его можно назвать нечетким отношением и обозначить через R:

$$R = \mathrm{A} \to \mathrm{B},$$

где «$\to$» называют нечеткой импликацией.

Отношение R можно рассматривать как нечеткое подмножество прямого произведения $X \times Y$ полного множества предпосылок X и заключений Y. Таким образом, процесс получения (нечеткого) результата вывода B' с использованием данного наблюдения A' и знания А $\to$ В можно представить в виде формулы

$$\mathrm{B}' = \mathrm{A}' \circ R = \mathrm{A}' \circ (\mathrm{A} \to \mathrm{B}),$$

где «$\circ$» — введенная выше операция свертки.

Как операцию композиции, так и операцию импликации в алгебре нечетких множеств можно реализовывать по-разному (при этом, естественно, будет разниться и итоговый получаемый результат), но в любом случае общий логический вывод осуществляется за следующие четыре этапа.

1. *Нечеткость* (введение нечеткости, фазификация, fuzzification). Функции принадлежности, определенные на входных переменных применяются к их фактическим значениям для определения степени истинности каждой предпосылки каждого правила.

2. *Логический вывод.* Вычисленное значение истинности для предпосылок каждого правила применяется к заключениям каждого правила. Это приводит к одному нечеткому подмножеству, которое будет назначено каждой переменной вывода для каждого правила. В качестве правил логического вывода обычно используются только операции min (МИНИМУМ) или prod (УМНОЖЕНИЕ). В логическом выводе МИНИМУМА функция принадлежности вывода «отсекается» по высоте, соответствующей вычисленной степени истинности предпосылки правила (нечеткая логика «И»). В логическом выводе УМНОЖЕНИЯ функция принадлежности вывода масштабируется при помощи вычисленной степени истинности предпосылки правила.

3. *Композиция.* Все нечеткие подмножества, назначенные к каждой переменной вывода (во всех правилах), объединяются вместе, чтобы формировать одно нечеткое подмножество для каждой переменной вывода. При подобном объединении обычно используются операции max (МАКСИМУМ) или sum (СУММА). При композиции МАКСИМУМА комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечный максимум по всем нечетким подмножествам (нечеткая логика «ИЛИ»). При композиции

СУММЫ комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечная сумма по всем нечетким подмножествам, назначенным переменной вывода правилами логического вывода.

4. В заключение (дополнительно) — *приведение к четкости* (дефазификация, defuzzification), которое используется, когда полезно преобразовать нечеткий набор выводов в четкое число. Имеется большое количество методов приведения к четкости, некоторые из которых рассмотрены ниже.

Пример. Пусть некоторая система описывается следующими нечеткими правилами:

Π_1: если x есть A, тогда w есть D,

Π_2: если y есть B, тогда w есть E,

Π_3: если z есть C, тогда w есть F,

где x, y и z — имена входных переменных, w — имя переменной вывода, а A, B, C, D, E, F — заданные функции принадлежности (треугольной формы).

Процедура получения логического вывода иллюстрируется рис. 1.9.

Предполагается, что входные переменные приняли некоторые конкретные (четкие) значения — x_0, y_0 и z_0.

В соответствии с приведенными этапами, на этапе 1 для данных значений и исходя из функций принадлежности A, B, C, находятся степени истинности $\alpha(x_0)$, $\alpha(y_0)$ и $\alpha(z_0)$ для предпосылок каждого из трех приведенных правил (см. рис. 1.9).

На этапе 2 происходит «отсекание» функций принадлежности заключений правил (т. е. D, E, F) на уровнях $\alpha(x_0)$, $\alpha(y_0)$ и $\alpha(z_0)$.

На этапе 3 рассматриваются усеченные на втором этапе функции принадлежности и производится их объединение с использованием операции max, в результате чего получается комбинированное нечеткое подмножество, описываемое функцией принадлежности $\mu_\Sigma(w)$ и соответствующее логическому выводу для выходной переменной w.

Наконец, на 4-м этапе — при необходимости — находится четкое значение выходной переменной, например, с применением центроидного метода: четкое значение выходной переменной определяется как центр тяжести для кривой $\mu_\Sigma(w)$, т. е.

$$w_0 = \frac{\int\limits_\Omega w\mu_\Sigma(w)\,dw}{\int\limits_\Omega \mu_\Sigma(w)\,dw}.$$

Рассмотрим следующие наиболее часто используемые модификации алгоритма нечеткого вывода, полагая, для простоты, что базу знаний организуют два нечетких правила вида:

Π_1: если x есть A_1 и y есть B_1, тогда z есть C_1,

Π_2: если x есть A_2 и y есть B_2, тогда z есть C_2, где x и y — имена входных переменных, z — имя переменной вывода, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — некоторые заданные функции принадлежности, при этом четкое значение z_0 необходимо определить на основе приведенной информации и четких значений x_0 и y_0.

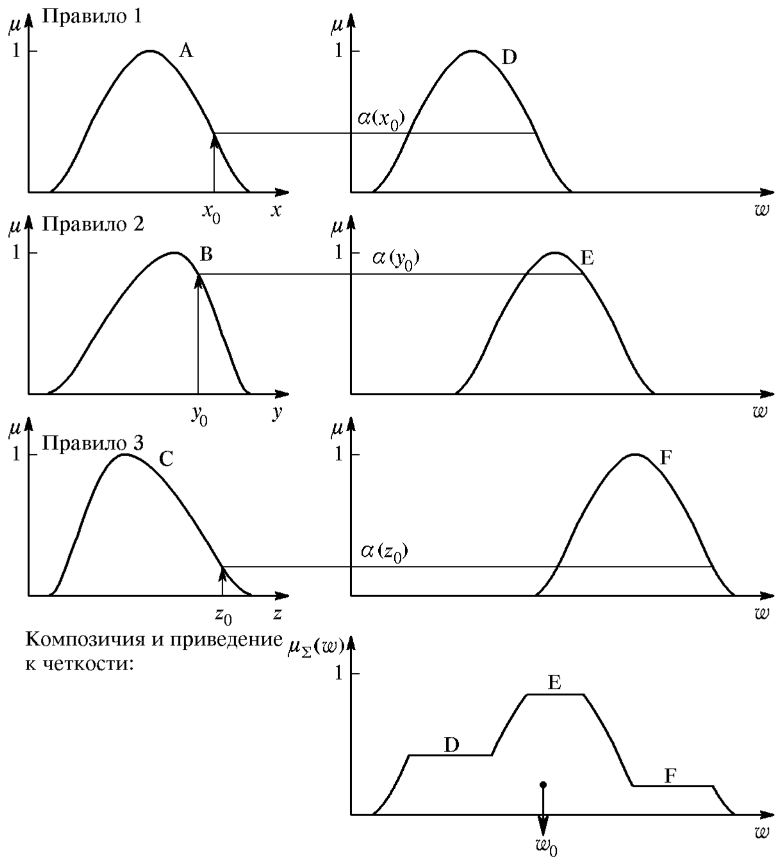

Рис. 1.9. Иллюстрация к процедуре логического вывода

1.5.1. Алгоритм Mamdani. Данный алгоритм соответствует рассмотренному примеру и рис. 1.9. В рассматриваемой ситуации он математически может быть описан следующим образом.

1. Нечеткость: находятся степени истинности для предпосылок каждого правила: $\mathrm{A}_1(x_0)$, $\mathrm{A}_2(x_0)$, $\mathrm{B}_1(y_0)$, $\mathrm{B}_2(y_0)$.

2. Нечеткий вывод: находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого из правил (с использованием операции

минимум)

$$\alpha_1 = \mathrm{A}_1(x_0) \wedge \mathrm{B}_1(y_0),$$

$$\alpha_2 = \mathrm{A}_2(x_0) \wedge \mathrm{B}_2(y_0),$$

где через «$\wedge$» обозначена операция логического минимума (min), затем находятся «усеченные» функции принадлежности

$$\mathrm{C}_1'(z) = \big(\alpha_1 \wedge \mathrm{C}_1(z)\big),$$

$$\mathrm{C}_2'(z) = \big(\alpha_2 \wedge \mathrm{C}_2(z)\big).$$

3. Композиция: с использование операции МАКСИМУМ (max, далее обозначаемой как «$\vee$») производится объединение найденных усеченных функций, что приводит к получению итогового нечеткого подмножества для переменной выхода с функцией принадлежности

$$\mu_\Sigma(z) = \mathrm{C}(z) = \mathrm{C}_1'(z) \vee \mathrm{C}_2'(z) = \big(\alpha_1 \wedge \mathrm{C}_1(z)\big) \vee \big(\alpha_2 \wedge \mathrm{C}_2(z)\big).$$

4. Наконец, приведение к четкости (для нахождения z_0) проводится, например, центроидным методом.

1.5.2. Алгоритм Tsukamoto. Исходные посылки — как у предыдущего алгоритма, но в данном случае предполагается, что функции $\mathrm{C}_1(z)$, $\mathrm{C}_2(z)$ являются монотонными.

1. Первый этап — такой же, как в алгоритме Mamdani.

2. На втором этапе сначала находятся (как в алгоритме Mamdani) уровни «отсечения» α_1 и α_2, а затем — посредством решения уравнений

$$\alpha_1 = \mathrm{C}_1(z_1), \quad \alpha_2 = \mathrm{C}_2(z_2)$$

— четкие значения (z_1 и z_2) для каждого из исходных правил.

3. Определяется четкое значение переменной вывода (как взвешенное среднее z_1 и z_2):

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2};$$

в общем случае (дискретный вариант центроидного метода)

$$z_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Пример. Пусть имеем $A_1(x_0) = 0{,}7$, $A_2(x_0) = 0{,}6$, $B_1(y_0) = 0{,}3$, $B_2(y_0) = 0{,}8$, соответствующие уровни отсечения

$$\alpha_1 = \min\big(A_1(x_0), B_1(y_0)\big) = \min(0{,}7;\ 0{,}3) = 0{,}3,$$

$$\alpha_2 = \min\big(A_2(x_0), B_2(y_0)\big) = \min(0{,}6;\ 0{,}8) = 0{,}6$$

и значения $z_1 = 8$ и $z_2 = 4$, найденные в результате решения уравнений

$$C_1(z_1) = 0{,}3, \quad C_2(z_2) = 0{,}6.$$

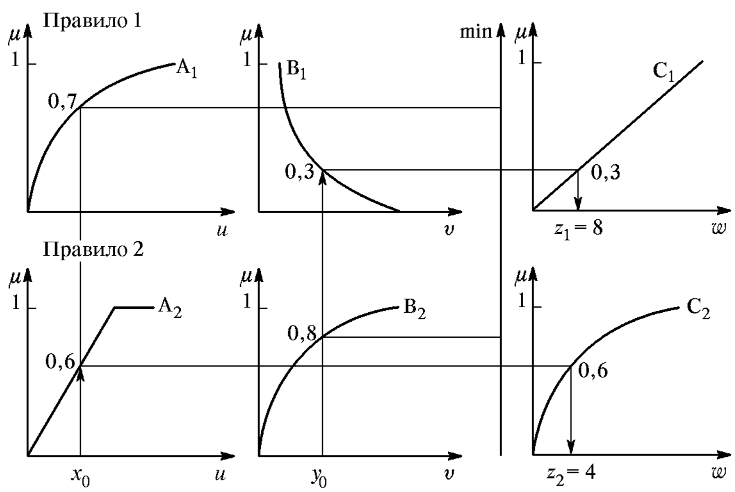

Рис. 1.10. Иллюстрации к алгоритму Tsukamoto

При этом четкое значение переменной вывода (см. рис. 1.10)

$$z_0 = (8 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}6)/(0{,}3 + 0{,}6) = 6.$$

1.5.3. Алгоритм Sugeno. Sugeno и Takagi использовали набор правил в следующей форме (как и раньше, приводим пример двух правил):

$П_1$: если x есть A_1 и y есть B_1, тогда $z_1 = a_1x + b_1y$,

$П_2$: если x есть A_2 и y есть B_2, тогда $z_2 = a_2x + b_2y$.

Представление алгоритма

1. Первый этап — как в алгоритме Mamdani.

2. На втором этапе находятся $\alpha_1 = \mathrm{A}_1(x_0) \wedge \mathrm{B}_1(y_0)$, $\alpha_2 = \mathrm{A}_2(x_0) \wedge \mathrm{B}_2(y_0)$ и индивидуальные выходы правил:

$$z_1^* = a_1 x_0 + b_1 y_0,$$
$$z_2^* = a_2 x_0 + b_2 y_0.$$

3. На третьем этапе определяется четкое значение переменной вывода:

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1^* + \alpha_2 z_2^*}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Иллюстрирует алгоритм рис. 1.11.

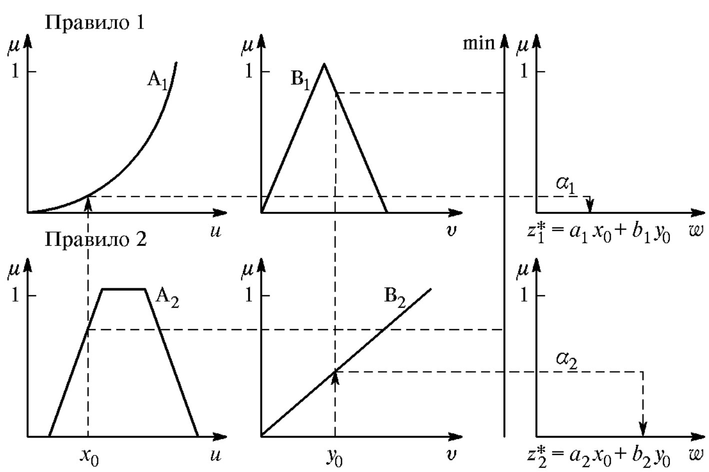

Рис. 1.11. Иллюстрация к алгоритму Sugeno

1.5.4. Алгоритм Larsen. В алгоритме Larsen нечеткая импликация моделируется с использованием оператора умножения.

О п и с а н и е а л г о р и т м а

1. Первый этап — как в алгоритме Mamdani.
2. На втором этапе, как в алгоритме Mamdani вначале находятся значения

$$\alpha_1 = \mathrm{A}_1(x_0) \wedge \mathrm{B}_1(y_0),$$
$$\alpha_2 = \mathrm{A}_2(x_0) \wedge \mathrm{B}_2(y_0),$$

а затем — частные нечеткие подмножества

$$\alpha_1 \mathrm{C}_1(z), \quad \alpha_2 \mathrm{C}_2(z).$$

3. Находится итоговое нечеткое подмножество с функцией принадлежности

$$\mu_\Sigma(z) = \mathrm{C}(z) = \big(\alpha_1 \mathrm{C}_1(z)\big) \vee \big(\alpha_2 \mathrm{C}_2(z)\big)$$

(в общем случае n правил $\mu_\Sigma(z) = \mathrm{C}(z) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \big(\alpha_i \mathrm{C}_i(z)\big)$.

4. При необходимости производится приведение к четкости (как в ранее рассмотренных алгоритмах).

Алгоритм Larsen иллюстрируется рис. 1.12.

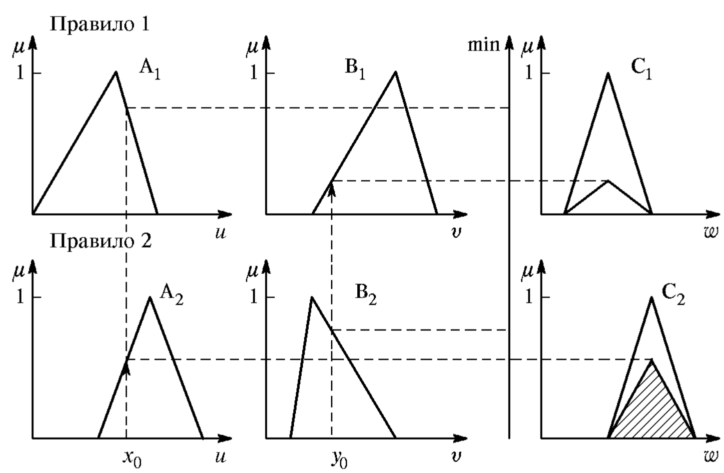

Рис. 1.12. Иллюстрация алгоритма Larsen

1.5.5. Упрощенный алгоритм нечеткого вывода. Исходные правила в данном случае задаются в виде:

Π_1: если x есть A_1 и y есть B_1, тогда $z_1 = c_1$,

Π_2: если x есть A_2 и y есть B_2, тогда $z_2 = c_2$,

где c_1 и c_2 — некоторые обычные (четкие) числа.

Описание алгоритма

1. Первый этап — как в алгоритме Mamdani.

2. На втором этапе находятся числа $\alpha_1 = \mathrm{A}_1(x_0) \wedge \mathrm{B}_1(y_0)$, $\alpha_2 = \mathrm{A}_2(x_0) \wedge \mathrm{B}_2(y_0)$.

3. На третьем этапе находится четкое значение выходной переменной по формуле

$$z_0 = \frac{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

или — в общем случае наличия n правил — по формуле

$$z_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i c_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Иллюстрация алгоритма приведена на рис. 1.13.

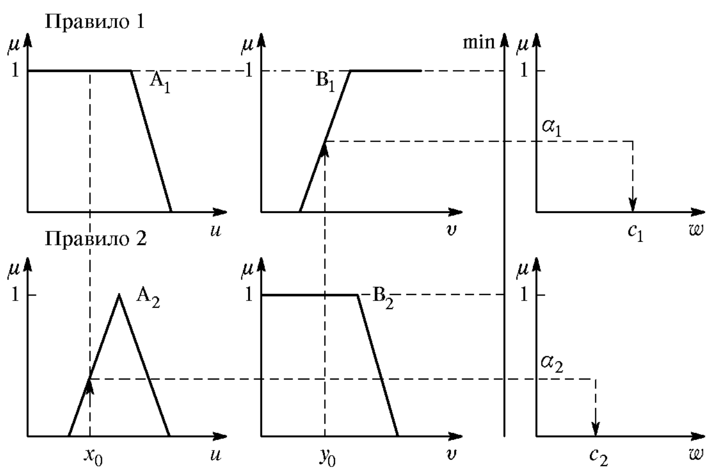

Рис. 1.13. Иллюстрация упрощенного алгоритма нечеткого вывода

1.5.6. Методы приведения к четкости

1. Выше уже был рассмотрен один из данных методов — центроидный. Приведем соответствующие формулы еще раз.

Для непрерывного варианта:

$$z_0 = \frac{\int\limits_{\Omega} z\mathrm{C}(z)\,dz}{\int\limits_{\Omega} \mathrm{C}(z)\,dz};$$

для дискретного варианта:

$$z_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

2. Первый максимум (First-of-Maxima). Четкая величина переменной вывода находится как наименьшее значение, при котором

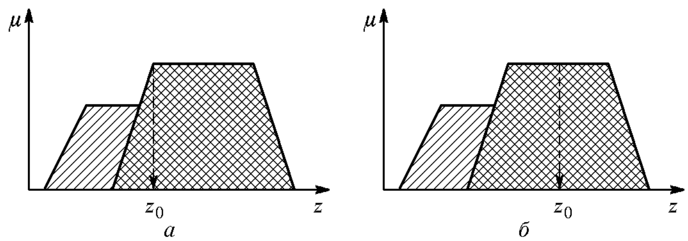

Рис. 1.14. Иллюстрация к методам приведения к четкости: *а* — первый максимум; *б* — средний максимум

достигается максимум итогового нечеткого множества, т. е. (см. рис. 1.14*а*)

$$z_0 = \min\big(z|\mathrm{C}(z) = \max_u \mathrm{C}(u)\big).$$

3. Средний максимум (Middle-of-Maxima). Четкое значение находится по формуле

$$z_0 = \frac{\int\limits_{\mathrm{G}} z\,dz}{\int\limits_{\mathrm{G}} dz},$$

где G — подмножество элементов, максимизирующих C (см. рис. 1.14*б*).

Дискретный вариант (если C — дискретно):

$$z_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j.$$

4. Критерий максимума (Max-Criterion). Четкое значение выбирается произвольно среди множества элементов, доставляющих максимум C, т. е.

$$z_0 \in \big\{z|\mathrm{C}(z) = \max_u \mathrm{C}(u)\big\}.$$

5. Высотная дефазификация (Height defuzzification). Элементы области определения Ω, для которых значения функции принад-

лежности меньше, чем некоторый уровень α в расчет не принимаются, и четкое значение рассчитывается по формуле

$$z_0 = \frac{\int\limits_{\mathrm{C}\alpha} z\mathrm{C}(z)\,dz}{\int\limits_{\mathrm{C}\alpha} \mathrm{C}(z)\,dz},$$

где $\mathrm{C}\alpha$ — нечеткое множество α-уровня (см. выше).

1.5.7. Нисходящие нечеткие выводы. Рассмотренные до сих пор нечеткие выводы представляют собой восходящие выводы от предпосылок к заключению. В последние годы в диагностических нечетких системах начинают применяться нисходящие выводы. Рассмотрим механизм подобного вывода на примере.

Возьмем упрощенную модель диагностики неисправности автомобиля с именами переменных:

x_1 — неисправность аккумулятора;
x_2 — отработка машинного масла;
y_1 — затруднения при запуске;
y_2 — ухудшение цвета выхлопных газов;
y_3 — недостаток мощности.

Между x_i и y_j существуют нечеткие причинные отношения $r_{ij} = x_i \to y_j$, которые можно представить в виде некоторой матрицы $\mathbf{R}$ с элементами $r_{ij} \in [0,\,1]$. Конкретные входы (предпосылки) и выходы (заключения) можно рассматривать как нечеткие множества A и B на пространствах X и Y. Отношения этих множеств можно обозначить как

$$B = A \circ \mathbf{R},$$

где, как и раньше, знак «$\circ$» обозначает правило композиции нечетких выводов.

В данном случае направление выводов является обратным к направлению выводов для правил, т.е. в случае диагностики имеется (задана) матрица $\mathbf{R}$ (знания эксперта), наблюдаются выходы B (или симптомы) и определяются входы A (или факторы).

Пусть знания эксперта-автомеханика имеют вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix},$$

а в результате осмотра автомобиля его состояние можно оценить как

$$B = 0{,}9/y_1 + 0{,}1/y_2 + 0{,}2/y_3.$$

Требуется определить причину такого состояния:

$$A = a_1/x_1 + a_2/x_2.$$

Отношение введенных нечетких множеств можно представить в виде

$$[0{,}9 \ \ 0{,}1 \ \ 0{,}2] = [a_1 \ \ a_2] \circ \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix},$$

либо, транспонируя, в виде нечетких векторов-столбцов:

$$\begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

При использовании (max–min)-композиции последнее соотношение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} 0{,}9 &= (0{,}9 \wedge a_1) \vee (0{,}6 \wedge a_2), \\ 0{,}1 &= (0{,}1 \wedge a_1) \vee (0{,}5 \wedge a_2), \\ 0{,}2 &= (0{,}2 \wedge a_1) \vee (0{,}5 \wedge a_2). \end{aligned}$$

При решении данной системы заметим прежде всего, что в первом уравнении второй член правой части не влияет на правую часть, поэтому

$$0{,}9 = 0{,}9 \wedge a_1, \quad a_1 \geqslant 0{,}9.$$

Из второго уравнения получим:

$$0{,}1 \geqslant 0{,}5 \wedge a_2, \quad a_2 \leqslant 0{,}1.$$

Полученное решение удовлетворяет третьему уравнению, таким образом имеем:

$$0{,}9 \leqslant a_1 \leqslant 1{,}0, \quad 0 \leqslant a_2 \leqslant 0{,}1,$$

т. е. лучше заменить аккумулятор (a_1 — параметр неисправности аккумулятора, a_2 — параметр отработки машинного масла).

На практике в задачах, подобных рассмотренной, количество переменных может быть существенным, могут одновременно использоваться различные композиции нечетких выводов, сама схема выводов может быть многокаскадной. Общих методов решения подобных задач в настоящее время, по-видимому, не существует.

1.6. Пример: нечеткий регулятор

Приведем еще один пример использования аппарата нечеткой логики, на этот раз — в задаче управления. Рассмотрим замкнутую систему регулирования, представленную на рис. 1.15, где через О обозначен объект управления, через Р — регулятор, а через u, y, e, x — соответственно, входной сигнал системы, ее выходной сигнал, сигнал ошибки (рассогласования), поступающий на вход регулятора, и выходной сигнал регулятора.

В рассматриваемой системы регулятор вырабатывает управляющий сигнал x в соответствии с выбранным алгоритмом регулирования, например, пропорционально сигналу ошибки, либо ее

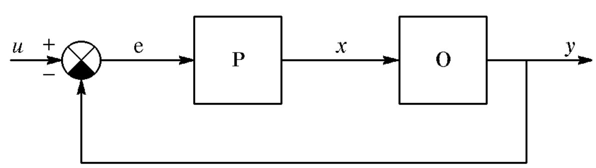

Рис. 1.15. Структура замкнутой системы управления

интегралу и т. п. Покажем, что в данном случае для выработки такого сигнала применимы рассмотренные выше методы аппарата нечеткой логики.

Предположим, что функции регулятора выполняет микроконтроллер, при этом аналоговый сигнал e ограничен диапазоном [⇔1, 1] и преобразуется в цифровую форму аналого-цифровым преобразователем (АЦП) с дискретностью 0,25, а выходной сигнал регулятора x формируется с помощью цифроаналогового преобразователя и имеет всего 5 уровней: ⇔1, ⇔0,5, 0, 0,5, 1.

Принимая во внимание данные уровни, введем лингвистические переменные:

A_1: большой положительный,

A_2: малый положительный,

A_3: нулевой,

A_4: малый отрицательный,

A_5: большой отрицательный,

и на дискретном множестве возможных значений сигнала рассогласования e определим функции принадлежности так, как это приведено в табл. 1.4.

Предположим, далее, что функционирование регулятора определяется следующими правилами (надо сказать, типичными для задача управления):

Π_1: если $\mathrm{e} = A_3$ и $\Delta\mathrm{e} = \mathrm{A}_3$, то $x = 0$,
Π_2: если $\mathrm{e} = A_2$ и $\Delta\mathrm{e} = \mathrm{A}_2$, то $x = \Leftrightarrow 0{,}5$,
Π_3: если $\mathrm{e} = A_4$ и $\Delta\mathrm{e} = \mathrm{A}_4$, то $x = 1$,
Π_4: если $\mathrm{e} = A_1$ и $\Delta\mathrm{e} = \mathrm{A}_1$, то $x = \Leftrightarrow 1$,

где $\Delta\mathrm{e}$ — первая разность сигнала ошибки в текущий дискретный момент времени.

Таблица 1.4. **Значения функций принадлежности**

	−1	−0,75	−0,5	−0,25	0	0,25	0,5	0,75	1
$\mathrm{A}_1(\mathrm{e})$	0	0	0	0	0	0	0,3	0,7	1
$\mathrm{A}_2(\mathrm{e})$	0	0	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3
$\mathrm{A}_3(\mathrm{e})$	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0
$\mathrm{A}_4(\mathrm{e})$	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0	0	0
$\mathrm{A}_5(\mathrm{e})$	1	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0

Заметим, что набор правил может быть, вообще говоря, и каким-то другим. Если, например, используется упрощенный алгоритм нечеткого вывода, то при значениях, скажем, $\mathrm{e} = 0{,}25$ и $\Delta\mathrm{e} = 0{,}5$ имеем:

$$\alpha_1 = \min\,(0{,}7;\ 0{,}3) = 0{,}3 \quad \text{и} \quad x_1 = 0,$$
$$\alpha_2 = \min\,(0{,}7;\ 1) = 0{,}7 \quad \text{и} \quad x_2 = \Leftrightarrow 0{,}5,$$
$$\alpha_3 = \min\,(0;\ 0) = 0 \quad \text{и} \quad x_3 = 1,$$
$$\alpha_4 = \min\,(0;\ 0{,}3) = 0{,}3 \quad \text{и} \quad x_4 = \Leftrightarrow 1,$$

и выход регулятора

$$x = \frac{0{,}3 \cdot 0 + 0{,}7 \cdot (\Leftrightarrow 0{,}5) + 0 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot (\Leftrightarrow 1)}{0{,}3 + 0{,}7 + 0 + 0{,}3} = \frac{\Leftrightarrow 0{,}65}{1{,}3} = \Leftrightarrow 0{,}5.$$

Аналогичным образом значения выходного сигнала регулятора рассчитываются при других значениях e и $\Delta\mathrm{e}$.

Отметим, что при проектировании подобных («нечетких») регуляторов основным (и не формализуемым) этапом является задание набора нечетких правил. Другие аспекты: выбор формы функций принадлежности, алгоритма приведения к четкости и т. п. представляются задачами более простыми.

1.7. Эффективность систем принятия решений, использующих методы нечеткой логики

Возможность использования аппарата нечеткой логики базируется на следующих результатах.

1. В 1992 г. Wang показал, что нечеткая система, использующая набор правил

Π_1: если x_i есть A_i и y_i есть B_i, тогда z_i есть C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, при:

1) гауссовских функциях принадлежности

$$\mathrm{A}_i(x) = \exp\left(\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{x \Leftrightarrow \alpha_{i1}}{\beta_{i1}}\right)^2\right), \quad \mathrm{B}_i(y) = \exp\left(\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{y \Leftrightarrow \alpha_{i2}}{\beta_{i2}}\right)^2\right),$$

$$\mathrm{C}_i(z) = \exp\left(\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{z \Leftrightarrow \alpha_{i3}}{\beta_{i3}}\right)^2\right);$$

2) композиции в виде произведения

$$\big(\mathrm{A}_i(x) \text{ and } \mathrm{B}_i(y)\big) = \mathrm{A}_i(x)\mathrm{B}_i(y);$$

3) импликации в форме (Larsen)

$$\big(\mathrm{A}_i(x) \text{ and } \mathrm{B}_i(y)\big) \to \mathrm{C}_i(z) = \mathrm{A}_i(x)\mathrm{B}_i(y)\mathrm{C}_i(z);$$

4) центроидном методе приведения к четкости

$$z_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{A}_i \mathrm{B}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \mathrm{B}_i},$$

где α_i — центры C_i; является универсальным аппроксиматором, т.е. может аппроксимировать любую непрерывную функцию на компакте U с произвольной точностью (естественно, при $n \to \infty$).

Иначе говоря, Wang доказал т е о р е м у: *для каждой вещественной непрерывной функции g, заданной на компакте U, и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует нечеткая экспертная система, формирующая выходную функцию $f(x)$ такую, что*

$$\sup_{x \in U} \|g(x) \Leftrightarrow f(x)\| \leqslant \varepsilon,$$

где $\|\cdot\|$ — символ принятого расстояния между функциями.

2. В 1995 г. Castro показал, что логический контроллер Mamdani при:

1) симметричных треугольных функциях принадлежности:

$$\mathrm{A}_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1 \Leftrightarrow |a_i \Leftrightarrow x|}{\alpha_i}, & \text{если } |a_i \Leftrightarrow x| \leqslant \alpha_i, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\mathrm{B}_i(y) = \begin{cases} \dfrac{1 \Leftrightarrow |b_i \Leftrightarrow y|}{\beta_i}, & \text{если } |b_i \Leftrightarrow y| \leqslant \beta_i, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\mathrm{C}_i(z) = \begin{cases} \dfrac{1 \Leftrightarrow |c_i \Leftrightarrow z|}{\gamma_i}, & \text{если } |c_i \Leftrightarrow z| \leqslant \gamma_i, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

2) композиции с использованием операции min:

$$\big(\mathrm{A}_i(x) \text{ and } \mathrm{B}_i(y)\big) = \min\big(\mathrm{A}_i(x)\mathrm{B}_i(y)\big);$$

3) импликации в форме Mamdani и центроидного метода приведения к четкости:

$$z_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \min\big(\mathrm{A}_i(x)\mathrm{B}_i(y)\big)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \min\big(\mathrm{A}_i(x)\mathrm{B}_i(y)\big)},$$

где c_i — центры C_i; также является универсальным аппроксиматором.

Вообще говоря, системы с нечеткой логикой целесообразно применять для сложных процессов, когда нет простой математической модели; если экспертные знания об объекте или о процессе можно сформулировать только в лингвистической форме.

Данные системы применять нецелесообразно, когда требуемый результат может быть получен каким-либо другим (стандартным) путем, или когда для объекта или процесса уже найдена адекватная и легко исследуемая математическая модель.

Отметим, что *основные недостатки* систем с нечеткой логикой связаны с тем, что:

- исходный набор постулируемых нечетких правил формулируется экспертом-человеком и может оказаться неполным или противоречивым;
- вид и параметры функций принадлежности, описывающих входные и выходные переменные системы, выбираются субъективно и могут оказаться не вполне отражающими реальную действительность.